特集／結び目的思考法のすすめ

作用素環と結び目

河東　泰之

1. 初めに

作用素環論を専門とする私がこの原稿を頼まれたのは，もちろん結び目の不変量であるジョーンズ多項式が作用素環論を用いて発見されたからであろう．この論文の出版は 1985 年であり，これによって結び目理論の様相は完全に一変した．私が学部 4 年生として作用素環論を本格的に学び始めたのは 1984 年のことであり，ジョーンズのこの論文のプレプリントが 1984 年の夏頃に回ってきたことをよく覚えている．当時はインターネットはまだ全く一般的ではなく，当然 arXiv もなかったのであり，服部晶夫先生がこのプレプリントを，「アレクサンダー多項式とは違う新しい結び目の多項式不変量が発見された」というコメントと共に我々に見せてくれたのであった．本稿ではこのジョーンズ多項式にまつわる様々な話題を初期の展開に重点を置いて解説し，さらに最近のトポロジカル量子コンピュータとの関連について解説してみたい．

2. 結び目と不変量

結び目とはだいたいはこの 3 次元空間の中で何本かの紐が絡まったものである．紐の太さは考えず，紐の両端は閉じているものとする．たとえば図 1 のようなものだ．この図では紐は一本だけである．

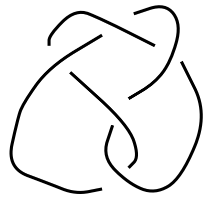

図 1　結び目

これらを 3 次元空間の中で連続的に伸び縮みさせて移りあえるようなものを同じ結び目とする．この際に紐を切ることは許されない．結び目同士がこの意味で同じものであるかどうかを判定することが数学的な問題である．(この設定をもっと数学的に厳密な形で述べることはもちろんできるが，そうしても別に理解が深まることはあまりないので，ここではこのような直感的な説明にとどめておく．) 結び目の絵を見ただけで，これは 17 番，これは 2765 番，といった具合に機械的に番号を振って，番号が同じなら同じ結び目，違えば違う結び目，というようにできたらいいだろうと考えるのだが，そういうことはできていない．そこでもう少し要求を下げて，結び目に機械的に番号を振る，番号が違えば違う結びだが，番号が同じで違う結び目になってもいい，ということにしてみよう．これだとすべての結び目を 1 番にするというのでもいいことになってしまうがそれはあまりにもばかばかしいので，結び目が違う時にはでき

るだけ違う番号を振る，ということにしよう.「できるだけ」というのは数学的にあいまいな表現だが，とりあえず気にしないことにする．このようなものを結び目の「不変量」という．結び目を連続的に変形しても番号が不変だからである．

このように結び目に数字を対応させてもいいのだが，歴史的には多項式を対応させるものが研究されてきた．1920 年代に発見されたアレクサンダー多項式である．たとえば 8 の字結び目と言われる結び目には多項式 t^2-3t+1 が対応する．これは古くからよく研究されているもので，数学的意味もよくわかっていると言ってよい．これに対し，1984 年になって，全く違う背景から発見されたのが，最初に書いたジョーンズ多項式である．今ではジョーンズ多項式の作り方は初等的なもの含めていろいろ知られているが，ここではオリジナルな，作用素環に基づく方法をまず解説しよう．

3. 作用素環と部分因子環

ジョーンズ多項式の背景となった作用素環論のごく簡単な枠組みを説明する．作用素とはヒルベルト空間上の有界線形作用素のことであるが，ヒルベルト空間が有限次元の時は行列のことなので，行列の無限次元版と思ってよい．物理では同じもののことを演算子と呼ぶ．(有界でないものを考えることもあり，それが重要な場合もあるがここでは考えないことにする．) 作用素の集合で和と積とスカラー倍で閉じていて，乗法単位元 (恒等作用素) を含んでいるものを考える．さらに共役演算と適当な位相で閉じているものを作用素環という．(共役を取る演算は，有限次元ヒルベルト空間の上の作用素，すなわち行列の場合は，A の共役転置行列 A^* を取る操作のことである．物理では A^* のことを $A^\dagger$ と書く．) 作用素環には「適当な位相」の取り方によって 2 種類あり，C^* 環とフォンノイマン環と呼ばれる．ここで考えたいのはフォンノイマン環のほうだが今はあまり違いは気にしなくてよい．さて作用素環 M とその部分作用素環 N を考えよう．たとえば有限次元ヒルベルト空間上の作用素の場合は，M として 4×4 の複素成分行列全体を考え，N として

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

の形のもの全体を考えればよい．これは部分環の入り方がつまらないものだが，無限次元になるともっと面白い入り方がたくさんあるというのがジョーンズの驚くべき発見であった．

体と部分体があるときは，ガロア理論が有用である．また群と部分群があるときに，それらの表現の間の関係についても，誘導表現の理論など多くの研究が古くからある．このような理論を作用素環と部分作用素環についても考えたいというのがもともとのジョーンズの考えであった．体の拡大 $K \subset L$ については拡大次数 $[L:K]$ があり，部分群 $H \subset G$ については指数 $[G:H]$ がある．これに対応するものが部分作用素環 $N \subset M$ のジョーンズ指数 $[M:N]$ である．体の拡大次数や部分群の指数は定義から明らかに，自然数かまたは無限大であるが，ジョーンズ指数の定義ではどのような値を取るかが明らかではない．とりあえず 1 以上の実数値すべてを取りうるように見えるのだが，これが実際にどのような値を取るかというのがジョーンズが最初に取り組んだ問題である．ジョーンズによるその答えは驚くべきもので，取りうる値は $4\cos^2(\pi/n)$ $(n=3,4,5,\ldots)$ または 4 以上のすべての実数，および無限大というものであった．この証明の際に，ジョーンズはジョーンズ射影と呼ばれる作用素の列 e_k $(k=1,2,3,\ldots)$ を導入し，次の関係式を得た．

$$\begin{aligned} e_j e_k &= e_k e_j, \quad |j-k|>1 \text{ のとき}, \\ e_j e_{j\pm1} e_j &= [M:N]^{-1} e_j. \end{aligned}$$

この関係式は，テンパーリーとリーブが前に全く別の文脈で研究していたので，この関係式を満たす射影 e_j たちの生成する環をテンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数と呼ぶ．ジョーンズ理論の設

定では，この環の上にトレース tr と呼ばれる線型汎関数があることが重要である．トレースという名前は，線型代数における行列のトレースと同様に，$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ という条件を満たすことから来ている．

部分作用素環の理論を，作用素環のガロア理論の類似と思う見方は重要であり，量子群に似た新しい代数系がガロア群の代わりに現れる．ジョーンズの最初の理論からは 40 年近くがたったが，この新しい代数系の最も適切な見方はテンソル圏に基づくものであると思われる．これは重要なテーマで現在も多くの進展があるが，本稿では深入りしないことにする．

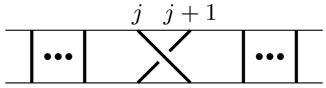

図 2　組み紐 σ_j

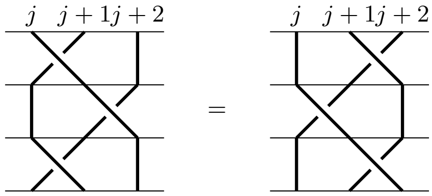

図 3　組み紐関係式 $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$

4. 組み紐，結び目，ジョーンズ多項式

ジョーンズが，上述のテンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数について講演したところ，ドラハープが組み紐群の関係式との類似を指摘したという．それがジョーンズ多項式の発見に結びついたのである．そこでまず組み紐群について説明しよう．組み紐とは n 本の紐が上から下に絡まりながら伸びているもののことである．n 個の始点から真下に行ったところに n 個の終点があるとする．結び目の時と同様に，連続的な変形で移りあえるもの同士は同じものと見なす．組み紐が二つあるときに，上下につなげば新しい組み紐ができる．組み紐たちはこれを演算として群 B_n になる．(n は一つ固定している．) この演算は可換でないので，どちらを上にするかは指定する必要がある．n 本の紐が全く絡まずに下に降りているというのが B_n の単位元である．また絡まりは一つずつ逆にほどいていけるので，それぞれの元に逆元があることもわかる．

組み紐で，図 2 のように，j 本目と $j+1$ 本目の紐が絡まっている元を σ_j としよう．($j = 1, 2, \ldots, n-1$ である．) $\sigma_j^{\pm 1}$ たちを掛けることにより B_n のすべての元が書けるので，σ_j たちは B_n の生成元である．

これらの生成元の間の関係式は次のようになることが知られている．

$$\sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j, \quad |j-k| > 1 \text{ のとき},$$
$$\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}.$$

下の関係式を図示したのが図 3 である．この関係式が，テンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数の関係式と似ていることは，言われてみれば明らかであろう．

ジョーンズはこの類似に基づき，組み紐群からテンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数へのユニタリ表現を構成することに成功した．(テンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数には共役演算があり，ユニタリ元が定義できる．実際には，テンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数の元は行列で書くことができ，そうすればユニタリ元というのは普通のユニタリ行列のことである．)

さて組み紐と結び目は何か似たものに見えるが，組み紐群のユニタリ表現から結び目の不変量を作るにはまだもう一ステップ必要である．組み紐を一つ取ろう．1 本目の始点と終点をつなぎ，2 本目の始点と終点をつなぎ... としていくと結び目ができる．(j 本目をつなぐ紐と，k 本目をつなぐ紐は絡まないようにする．) たとえば図 4 がその一例であり，この結び目は，まったく結ばれていない

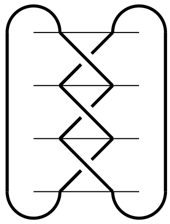

図 4　組み紐から結び目へ

自明な結び目の次に簡単な三葉結び目である．このやり方で，どの結び目も組み紐から作ることができる，というのが古典的なアレクサンダーの定理である．

しかし，組み紐から結び目への対応は 1 対 1 ではないことがすぐにわかる．そこで，どのような組み紐が同じ結び目を与えるのか，ということが問題になるが，これに答えるのが，やはり古典的なマルコフの定理である．

組み紐群は非可換なので一般に $\sigma, \sigma' \in B_n$ のとき $\sigma\sigma'$ と $\sigma'\sigma$ とは異なる．しかしこれら二つの組み紐の始点と終点を上のようにつなぐと，できる結び目は同じであることがすぐにわかる．また $\sigma \in B_n$ のとき $\sigma\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ を考える．ここで σ は $n+1$ 本目に全く絡まらない紐を加えて B_{n+1} の元とみなして $\sigma_n^{\pm 1}$ と掛けている．すると，σ の始点，終点をつないでできる結び目と，$\sigma\sigma_n^{\pm 1}$ の始点，終点をつないでできる結び目が同じであることが簡単にわかる．二つの組み紐が同じ結び目を与えていれば，その二つの組み紐は，上の二つの関係を有限回繰り返すことによって移りあえる，というのがマルコフの定理である．

これでジョーンズ多項式の作り方が説明できる．結び目を一つ取り，さらにこれを与えるような組み紐を一つ取る．$[M:N]=(1+t)^2/t$ とおき，この組み紐を，この値に対応するテンパーリー・リーブ・ジョーンズ代数へのユニタリ表現で写し，そのトレースを取る．組み紐の取り方が一意的でないわけだが，$\sigma\sigma'$ でも $\sigma'\sigma$ でもトレースを取れば同じ値になるのでこの不定性は問題を起こさない．組み紐 σ を取るか $\sigma\sigma_n^{\pm 1}$ を取るかではトレースの値が違ってしまうが，この違いを打ち消すような細工をすることができ，そうするとこちらの不定性も問題を起こさないようにすることができる．これはトレースがマルコフ・トレースと呼ばれる特別なタイプのものだからである．(なおマルコフ・トレースという名前はマルコフ連鎖との類似に基づいてジョーンズがつけたものである．マルコフの定理のマルコフはマルコフ連鎖のマルコフの息子である．）こうしてできるトレースの値が結び目の不変量になるわけだが，これをパラメータ t を含んだ形で書くと $t^{\pm 1}$ の多項式になることが証明できる．これが結び目のジョーンズ多項式である．($[M:N]=(1+t)^2/t$ という一見変な置き方をしたおかげでここで多項式になるのである．)

これがアレクサンダー多項式などの既知のものとはっきり違う点は次の通りである．結び目の図を鏡に映して考えると，一般には元の結び目と鏡に映った結び目は 3 次元空間内で連続的に変形することはできない．たとえば簡単な三葉結び目と，それを鏡に映したものは違う結び目である．しかし多くのトポロジーに基づく不変量，たとえばアレクサンダー多項式では，結び目とそれを鏡に映したものを区別できない．これに対し，ジョーンズ多項式を使うと，しばしば結び目とそれを鏡に映したものが区別できる．たとえば三葉結び目と，それを鏡に映したもののジョーンズ多項式は異なっている．ジョーンズによると，ジョーンズ多項式を発見した際に興奮してバーマン (有名なトポロジーの研究者) に説明したところ，最初バーマンは半信半疑で，単にアレクサンダー多項式 (の同値な書き換え) を再発見しただけではないかと思ったのだが，三葉結び目と，それを鏡に映したもののジョーンズ多項式は異なっているという計算を見て初めて新発見であることを納得したそうである．

この後結び目の不変量は爆発的な勢いで拡張，一般化され，3 次元多様体などの，トポロジーの対象物の多くの不変量が発見された．また，量子群，テンソル圏，頂点作用素代数，統計力学，場の量子論などとの関係の理解も劇的に進展してい

る．しかし現在もまだこれらのからくりが完全にわかったという状態には程遠く，多くの研究が続けられているところである．

ここで強調しておくが，部分作用素環の理論とジョーンズ多項式はジョーンズという同一人物によって始められたが，これらは別々の業績であり，別々の数学者が発見していたとしてもまったくおかしくなかったということである．すなわちジョーンズは，相互に関連しているとはいえ，きわめて独創的な発見を 2 回行ったのであり，実に偉大な貢献であると言える．この発見についてジョーンズと話したことがあるが，当時は組み紐群のユニタリ表現などにはほとんどだれも興味を持っていなかったのだ，ということであった．しかしこのジョーンズ多項式の発見以後，組み紐群は数学，物理学の極めて多くの研究テーマに関係していることがわかり，現代数学の中心的な話題として確立されたのである．これは現在においても全く変わりがない．

この節の最後に脱線しておこう．一般に数学者が自分の名前がついた概念を自分で言う時にどうするか，という問題である．淡々と自分の名前を呼ぶ人もいるが，ちょっとそれは言いにくいと感じる人も少なくない．私が何度かジョーンズの話を聞いたところだと，まずジョーンズはジョーンズ指数のことは単に指数と言う．これはまあそうだろう，というところだがジョーンズ多項式の方は単に多項式と言うわけにはいかない．大きなコンファレンスだと V 多項式と呼んでいるのを何回か聞いたことがある．最初のジョーンズの論文でジョーンズ多項式を V と書いていたからである．しかし少人数の議論などだと「私の多項式 (my polynomial)」と呼んでいるのも何度か聞いたことがある．なかなかかっこいいな，と思ったものである．

5. 量子コンピュータ

さてここまではかなり古い話である．ここで最近ホットな話題である量子コンピュータの話に移ろう．グーグルの量子超越性の話などが最近ニュースをにぎわしており，毎日のようにマスメディアに量子コンピュータの記事が出ている．これがジョーンズ多項式と関連しているので，それについて説明したい．まず量子コンピュータの基本的原理について簡単に説明しよう．量子コンピュータの始まりとよく言われるのは 1985 年のドイッチュの論文である．

まず今ある普通のコンピュータでは，データの状態は 0 または 1 からなる有限列である．0 か 1 かの 1 文字を 1 ビットという．これに対し演算を行うのだが，基本演算は 1 ビットの反転 (NOT)，2 ビットの OR, AND である．2 ビットの AND の反転 (NAND) を使えばほかの二つも作れるので，これ一つが基本演算と言ってもよい．計算の複雑さと言うのは基本演算が何回かかるかで測れる．n ビットの入力に対し，必要となる基本演算の回数が n の多項式で抑えられるかどうか，といったことが問題になる．

これに対し量子コンピュータの扱うデータの基本単位は量子ビットと呼ばれ，2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の単位ベクトルである．$\mathbb{C}^2$ の基底ベクトルを $|0\rangle, |1\rangle$ と書く．n 量子ビットのデータは $\mathbb{C}^2$ の n 個のテンソル積，すなわち 2^n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{2^n}$ の単位ベクトルである．これに対する量子コンピュータの基本演算は，ある特定のユニタリ行列で $\mathbb{C}^2$ の 2 個のテンソル積部分についてのみ作用し，残りの $n-2$ 個については恒等的に作用するものである．特定のユニタリ行列として何を取るかはある程度自由度があるが，標準的な取り方がある．基本演算を何回か行った後，結果である単位ベクトルを観測するのだが，その結果は量子力学の原理により，確率的にしか定まらない．このベクトル空間の標準的な基底として $|j_1 j_2 \dots j_n\rangle$ を取ろう．(各 j_k は 0 または 1 である．) このとき単位ベクトルを $\sum a_{j_1 j_2 \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_n\rangle$ と書くと，観測結果が $j_1 j_2 \dots j_n$ になる確率は $|a_{j_1 j_2 \dots j_n}|^2$ で与えられる．これが量子コンピュータの原理をきわめて単純にまとめたものである．基本演算はベクトルに行列を掛けるだけなので現在の普通の

コンピュータでも計算できる．この意味で，現在のコンピュータでできることと量子コンピュータでできることは「同じ」である．しかし，ベクトルや行列のサイズは n に対し 2^n で増えて行くのでたちまち巨大になる．量子コンピュータでは巨大なサイズのユニタリ行列を，量子力学の原理によって 1 回の基本演算で掛けることができるため，現在のコンピュータよりはるかに高速に問題を解ける可能性がある．実際に巨大な自然数の素因数分解を行うショーのアルゴリズムなど，量子コンピュータを使うことによってきわめて高速に実行できるアルゴリズムがいくつか知られている．

6. トポロジカル量子コンピュータとジョーンズ多項式

これまでの説明だと，結び目のジョーンズ多項式と量子コンピュータには何の関係もなさそうである．しかしちゃんと関係があるのであって，それはキタエフの 1997 年の論文に始まる．量子コンピュータの実現において大きな問題となるのがエラー訂正である．量子ビットを物理的に実現しようとした場合，非常に簡単に量子ビットの状態が変化してエラーを生じてしまうことが大きな問題となっており，これを解決しなくては実用的な量子コンピュータを作ることができない．最近話題のグーグルの量子超越性の実験でもこの問題はまだ解決されていない．これに対し結び目の理論を用いることによってエラー訂正を実現しようとするのがキタエフのアイディアである．

ジョーンズ多項式を作った際の組み紐群のユニタリ表現においては組み紐群の生成元 σ_j があるユニタリ行列に写される．このユニタリ行列を量子コンピュータにおける基本演算として採用するのである．こうすれば量子コンピュータにおける計算とは結び目の不変量 (ジョーンズ多項式の特定の t における値) を求めることとなる．この原理に基づく量子コンピュータをトポロジカル量子コンピュータと呼ぶ．大手 IT 企業の中でマイクロソフトだけがこの方法の研究に大きな力を注いでおり，多くの数学者を雇って研究を進めている．これは 4 次元ポアンカレ予想の解決でフィールズ賞を取ったフリードマンが直接マイクロソフトのゲイツに訴えて数学的な研究所，マイクロソフト・ステーション Q が実現したからである．私もここに 2 回行ったことがあるが，カリフォルニア大学サンタバーバラ校の美しいキャンパス内にある小さな研究所である．理論物理学の研究所として有名なカブリ理論物理学研究所がすぐ向かいにある．

このトポロジカル量子コンピュータを実現するための物理的な道具と期待されているのが非可換エニオンと呼ばれる準粒子である．エニオンとは 2 次元のトポロジカル相に関係して現れる粒子状のもので，通常の粒子がボソン，フェルミオンに分類されるのに対し，エニオンと呼ばれる．粒子の入れ替えについてボソン，フェルミオンでは位相因子 ± 1 が生じるのに対し，任意の (any) 位相因子が生じることからエニオン (anyon) と名付けられた．これを使うと組み紐の表現によるユニタリ行列が，エニオンの入れ替えによって物理的に実現できると考えられている．そのエニオンの中でも非可換エニオンと呼ばれるものが必要なのだが，多くの人の期待にも関わらず，まだこの存在は確認されていない．したがって，マイクロソフトは存在するかどうかもわからない準粒子に期待して多額の研究費をつぎ込んでいるのか，と言われることもある．

なお最後になるが，量子力学の数学的基礎を築いたのも，作用素環の理論を創始したのも，現在のデジタルコンピュータの基本原理を考え出したのもすべてフォンノイマンである．ジョーンズの部分作用素環の理論でもフォンノイマンの導入したカップリング・コンスタントが重要な役割を果たしている．フォンノイマンの時代を超えた偉大さが深く感じられる話である．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）