ヒルベルト空間と作用素環

河 東　泰 之

1. 初めに

ヒルベルト本人は作用素環論の研究をしていたわけではない．作用素環論の始まりとされるフォン・ノイマンの論文が出版されたのは 1930 年であり，この年にヒルベルトは 68 歳だった．(なおこの論文と同じ号の Mathematische Annalen にフォンノイマンの別の論文が載っており，それが抽象ヒルベルト空間という名前を初めて導入した論文である．) しかし作用素環論にとってヒルベルト空間は基本的な重要性を持っていることは明らかなので，その立場から両者の関係を説明したい．

作用素環とは作用素のなす環であり，作用素とはヒルベルト空間上の連続線型作用素を省略した言い方である．環を考えるために線型作用素に限ることと，関数解析的な手法を使うために連続作用素に限ることには明らかな必然性がある．しかし線型作用素の作用する空間をヒルベルト空間に限ることの必然性は自明ではない．そこで以下，ヒルベルト空間の何がよいのか，作用素環論の立場から考えてみよう．

2. 有限次元空間から無限次元へ

複素係数の有限次元ベクトル空間上の線型作用素を考えよう．基底を決めればこれは行列と同じものである．基底を決めればベクトルは数ベクトルと同一視され，数ベクトルには標準的な内積が入っているため，最初から内積が自然にあるような気になってしまいがちであるが，複素係数の有限次元ベクトル空間といっただけでは内積は定まっていない．線形写像を行列 A と思う際には基底が選ばれているので，基底によらないのは A と PAP^{-1} を同値と思う同値関係における同値類である．(ここで P は正則行列である．) この同値類の中でよい表示を求めるのがジョルダン標準形の理論である．この理論には内積は関係ないので，これは有限次元バナッハ空間上の連続線型作用素の理論である．(バナッハ空間といっても今はノルムは関係ないが．) 一方，自己共役行列や正規行列のユニタリ対角化では，共役転置行列 A^* が現れる．A^* は共役転置行列としては表面上内積を使っていないようだが，標準内積についての共役行列なのであり，内積に依存する操作である．この意味で，ユニタリ対角化の理論は有限次元ヒルベルト空間上の連続線型作用素の理論である．ユニタリ対角化の類似物は無限次元ヒルベルト空間上でも，スペクトル分解の理論として成立しているが，ジョルダン標準形の無限次元版は存在していないことに注意しよう．(現在まだないというだけではなく，そのような理論は存在しないと考えられる．)

内積があるという前提の下で行列の共役転置演算 $*$ を考えると，この演算について閉じている作用素の環というものが考えられる．黙って作用素環といえば，このように $*$ 演算で閉じているもの

を考える．有限次元の作用素環を考えると，それはすべて $n \times n$ の複素成分行列環 $M_n(\mathbf{C})$ の有限個の直和に同型となる．たとえば上三角行列全体の集合のようなものは，$*$ 演算で閉じていないので，ここでいう作用素環には入らない．有限次元だとかなり単純な状況なので，$*$ 演算で閉じている作用素環だけを考えるのは制限が強すぎると思うかもしれないが，このくらいの制限をつけないと無限次元では面白い理論は展開できなくなるのである．

無限次元ベクトル空間上の連続線型作用素を考える場合，バナッハ空間とヒルベルト空間での大きな違いは，後者の上の連続線型作用素 T については，共役作用素 T^* があるということである．共役作用素の存在はリースの表現定理から導かれ，これには直接的に内積の存在が効いている．無限次元でのこの $*$ 演算の有用性について以下説明していこう．

3. 可換な作用素環について

行列の積の特徴は一般に非可換であることなので，作用素環は非可換な場合に興味がある．しかしたまたま可換になることは禁じられているわけではない．ここでは積が可換な場合について考えてみよう．

作用素環は適当な位相で閉じていることを要請しており,「適当な位相」には 2 種類ある．ノルム位相 (ヒルベルト空間の単位球上の一様収束の定める位相) と，作用素の強位相 (ヒルベルト空間上の各点収束の定める位相) である．後者に「強」という字がついているが，こちらの方が弱い位相である．(ほかに作用素の弱位相というものがあり，それよりは強いので「強」の字がついている．) ヒルベルト空間上の連続線型作用素のなす環で $*$ 演算で閉じており，前者の位相で閉じているものを C^* 環，後者の位相で閉じているものをフォンノイマン環と言う．弱い位相で閉じている方が強い条件だから，フォンノイマン環は C^* 環の特別な場合に当たる．

可換な C^* 環はすべて，$C(X)$ (コンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素数値連続関数環) に同型である．(簡単のため C^* 環は恒等作用素を含むとした．) また可換なフォンノイマン環はすべて，$L^\infty(Y)$ (測度空間 Y 上の本質的有界可測関数環) に同型である．この意味から，一般の C^* 環は「非可換な連続関数環」，一般のフォンノイマン環は「非可換な本質的有界可測関数環」と思うことができる．ただしこれは心の持ちようを言っただけのことであるが.

このような簡明な可換作用素環の特徴づけが得られたのは，ヒルベルト空間上の作用素の $*$ 演算で閉じているという条件があったからである．(可換な作用素環の $*$ 演算というのは関数環の複素共役演算である．) $*$ 演算で閉じているという条件を落とした作用素環も考えることができ，そのような研究もあるが，可換環の場合でさえきれいな特徴づけや統一的な理論は全く得られていない．

4. 作用素環からヒルベルト空間へ

さてここまでは，ヒルベルト空間が先にあってその上の作用素の環を考える話をしていた．話を逆にして先に作用素 (と解釈されるはずのもの) のなす抽象的な環があって，後からヒルベルト空間を作る話をしよう．

C^* 環の上には $*$ 演算とノルムがあり，$\|T^*T\| = \|T\|^2$ が成り立っている．逆に $*$ 演算とノルムを持つ完備な環がこの条件を満たせば，ヒルベルト空間上の作用素環とみなせるというのがゲルファント・ナイマルクの古典的な定理である．$*$ 演算とノルムを持つ完備な環 A で上の等式が成り立っているというのが抽象的な C^* 環の定義だが，このときこの環の中で T^*T の形をしている元のことを正の元と定義することができる．この環の上の線型汎関数で正の元を正の数に写すものを正の汎関数と定義すると，そのようなものが十分にたくさんあることが一般的に証明できる．環 A は明らかに左掛け算 A 自身に作用しているが，このとき正の汎関数 φ を使って，A に $(x, y) = \varphi(y^*x)$ で

内積を定義することができる．この内積を使って完備化することにより，作用される方の A をヒルベルト空間に拡張することができる．正の汎関数は十分にたくさんあることが証明できるので，すべての正の汎関数を使うことにより,「A をヒルベルト空間に作用させる」という写像を単射になるようにすることができるのである．この GNS(ゲルファント・ナイマルク・シーガル) 構成法は抽象的な環から，最初はなかったヒルベルト空間を作り出すことをしている．後で述べる量子物理学との関係でいえば，これは観測可能量のなす代数系から，抽象的な状態汎関数を経由して，状態のなすヒルベルト空間を作り出していることに当たる．

5. 作用素環の表現論と分類理論

作用素環の分類を考える前に，ヒルベルト空間の分類を考えてみよう．ヒルベルト空間は次元によって完全に分類されるのでとても簡単である．特に最も興味のある可算無限次元の場合はヒルベルト空間はすべて同型なので分類はこれ以上ないくらいに易しい．一方バナッハ空間の分類を考えると，すべてのバナッハ空間を簡単な不変量で完全に分類するというのは不可能な問題である．1998 年にフィールズ賞を受賞したガワーズの業績を見ると，いくらでも変な，素朴な直感から外れたバナッハ空間が存在することがわかるとも言える．ヒルベルト空間に話を限ることによって初めてきれいな分類が得られるのだが，一方この分類はあまりに簡単すぎてつまらないと言える．

次に作用素環の分類を考えよう．まず有限次元空間上の作用素環との対比でいえば，無限次元の作用素環は，行列環の無限次元版である．また可換な作用素環との対比でいえば，非可換な作用素環は，連続関数環あるいは L^∞ 関数環の非可換版である．後者の立場から分類理論を考えてみたい．

まずフォンノイマン環の場合から見ると，測度空間に原子 (1 点の測度が正であるようなものと考えてよい) がなく，適当な可算性があれば，その上の本質的有界可測関数環はすべて同型である．たとえば多様体上の本質的有界可測関数環はすべて同型である．すなわちヒルベルト空間の分類の時のような簡単な一意性が成り立っている．そこで非可換なフォンノイマン環の場合はどうなるかを考えてみよう．可換から一番遠いという条件として，環の中心が自明 (複素数体に同型) という場合を考えてみよう．この条件はフォンノイマン環が直和に分解しないことと，またフォンノイマン環が単純であることと同値であることが知られており，このような作用素環を単純フォンノイマン環と呼ぶのが順当だが，歴史的理由によって因子環と呼ぶ．群の一般のユニタリ表現の研究が既約表現の研究に (しかるべき意味で) 帰着するというのと同様の意味で，一般のフォンノイマン環の研究は因子環の研究に帰着する．さて因子環の分類だが，フォンノイマンは共同研究者のマレーと共に，I_n 型 $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$，$\mathrm{II}_1$ 型, II_∞ 型，III 型への分類を行った．マレーとフォンノイマンはさらに，近似的有限次元という性質を導入し，近似的有限次元の II_1 型因子環は一意的であることを証明した．これは現在の視点からも極めて重要な結果である．一方，近似的有限次元ではない II_1 型因子環は (可分なヒルベルト空間に作用している場合でも) 互いに同型でないものが連続濃度存在することが示されている．これはマクダフのごく若いころの結果である．マクダフはこの結果とさらにもう一つの重要な結果のあと，作用素環をやめて幾何学に転向し，今では幾何学の大物となっている．前にマクダフを日本数学会の高木レクチャーに呼んだとき,「あなたのフォンノイマン環についての結果は今も大変重要です.」と話したところ,「フォンノイマン環論は私がやめてから多くの重要な進展があった.」と答えていた．

III 型については長い間理解が進まなかったが，冨田竹崎理論による大きな進展があり，これをふまえてコンヌは III_λ 型 $(0 \le \lambda \le 1)$ への細分類を行った．これはコンヌの博士論文である．その後多くの人による成果を簡単にまとめて書くと，近似的有限次元であるような因子環については比較的単純な不変量によって完全に分類される，そう

でない因子環はとてもたくさんあり完全な分類は絶望的である，ということである．前者の単純な不変量とは，コンヌ竹崎のウェイトの流れであり，これは測度空間上のエルゴード的な一径数自己同型群である．この不変量は表現論的なものと解釈することができるが，これについては C^* 環の場合と対比して後で述べる．近似的有限次元の場合は，I_n 型 $(n=1,2,3,\dots,\infty)$，II_1 型, II_∞ 型，III 型の分類に加えてこの不変量を使えば完全に分類できるというのがコンヌのフィールズ賞論文の大定理 (及び，一つだけ残されていたケースをカバーしたハーゲラップの結果) である．一方，近似的有限次元でない場合は，いくらでも変なものがあり，簡単な不変量で完全に分類するとか分類リストを列挙するといったことは全く不可能である．それでも近年ポパ，小沢らの成果によって深い結果が多く得られているので，理解が深まっているケースはたくさんあると言える．

さて次に C^* 環の話に移り，まず可換な場合から始めよう．二つのコンパクトハウスドルフ空間 X, Y に対し，$C(X), C(Y)$ が環として同型であるために必要十分条件は X, Y が同相であることである．このため，可換 C^* 環を分類する問題は，すべてのコンパクトハウスドルフ空間を同相という関係で分類する問題と同じことである．ここで分類という言葉は簡単な完全不変量を得るといった意味で使っているが，この意味でのコンパクトハウスドルフ空間の分類が到底不可能であることは容易に想像がつくであろう．コンパクト境界なし多様体といった，はるかに限定的な状況に制限してもなお絶望的に困難である．それでもコンパクトハウスドルフ空間を分類する簡単な不変量を考えてみたい．誰でもまず思いつくものは，ホモロジー群，コホモロジー群であろう．これらが同相についての完全不変量か，というともちろん全くそんなことはないが，それでも重要な不変量であることは間違いない．これは可換 C^* 環の不変量と思えるのでそれを一般の C^* 環に拡張できないかと考えるのはもっともであろう．しかしそのような一般化は知られておらず，存在しないと考えられている．その代わりに一般の C^* 環に対して定義される不変量が K 群である．コンパクトハウスドルフ空間 X の場合，だいたい偶数次のコホモロジー群を集めたようなものが $K^0(X)$, 奇数次のコホモロジー群を集めたようなものが $K^1(X)$ である．合わせて K 群という．これらはコンパクトハウスドルフ空間 X の不変量なので，可換 C^* 環の不変量と思えるが，こう考えると一般の C^* 環 A の場合に拡張できるのである．それらを $K_0(A)$, $K_1(A)$ と書く．コンパクトハウスドルフ空間に K 群を対応させるのは反変関手なので $0,1$ は上に書くが，可換 C^* 環からの関手と思うと共変になるので $0,1$ は下に書くのである．

さてコンパクトハウスドルフ空間の分類の場合，ホモロジー群やコホモロジー群は完全不変量からは程遠いと述べた．K 群はだいたいコホモロジー群を次数の偶奇でまとめたようなものなので，もちろんまったく完全不変量ではない．可換な C^* 環についてさえこうなのだから，非可換な C^* 環を K 群で分類しようというのは全く無理な話のように思えるが，過去 40 年くらいの研究の成果でわかってきたことは，解析的に性質が良いという種類の条件を追加して，さらに可換環から遠い状況を考えれば，これがほぼ可能になるというのが分類理論での驚くべき成果である．可換環から遠いというのは，フォンノイマン環の場合と同様に単純環を考えるということである．これを提唱したのはエリオットなので，この分類理論をエリオットプログラム，エリオット予想などという．

今「ほぼ」と書いたのは，正確には二つの K 群だけでなく，付加的な情報も追加しなければ分類には不十分だからだが，それは概念的な理解にはあまり重要でないので，ここでは気にしないことにして，解析的に性質が良いという方の条件を見よう．フォンノイマン環の時は「性質が良い」という条件にあたるものは近似的有限次元性であった．C^* 環でもこの直接的な類似を考えることができ，AF という名前で呼ばれる．フォンノイマン環の場合は，コンヌの大定理によって近似的有限次元性は多くの同値な言いかえを持ち，それら

の性質は統合して従順性と呼ばれる．C^* 環でも自然な従順性の定義があり，これは AF より弱い条件である．そして分類に適切な条件は (AF の方では強すぎるので) 従順性であることがわかっている．

従順性は作用素環論において特に重要な性質なので簡単に説明しておこう．まず一番の基本は離散群の従順性である．整数群 $\mathbf{Z}$ を例にとろう．群 $\mathbf{Z}$ 上の有界関数，すなわち両側に延びた有界数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対し，極限 $\lim_{|n|\to\infty} a_n$ を取るという操作を一般化したようなものを考える．すべての有界数列に対して値が定義されることを要請する．この操作が線型で，適当な意味で連続であることを要求するのは自然であろう．また正の値を取る数列に対し正の値を返すことも要請する．さらに，ある種の極限操作であることの現れとして，$\{a_n\}$ についても，この番号を一つだけずらした数列についても同じ値を返すことも要請する．これらの要請をすべて満たす，有界数列上の汎関数を実際に構成しようと試みてみれば，そのようなものを具体的には作れないことがわかるであろう．実はこのような汎関数が存在することが選択公理によって保障されるのである．このような汎関数が存在することは整数群 $\mathbf{Z}$ が「特別に良い」群であることを反映しており，このような群の性質を抽象化したものが従順性である．有限群，可換群は従順であり，生成元が 2 個以上の自由群や，たいていの行列群 ($SL(n,\mathbf{Z})$ など) は従順でない．群が従順であるというのは，だいたいは整数群 $\mathbf{Z}$ に近いという種類の条件である．離散群の性質の多くは作用素環の性質に翻訳することができ，従順性もその一例である．これによってフォンノイマン環の従順性，C^* 環の従順性が定義できるのである．すなわち，エリオットプログラムでは，代数的には，単純環という可換から遠いという条件を課しているが，解析的には，従順性という可換に近いという条件を課しているのである．

さて従順な単純 C^* 環は，K 群的な不変量で完全に分類されるであろうというのがエリオット予想であり，フォンノイマン環におけるコンヌの大定理の概念的な類似であったのだが，この分類理論はだいぶ進んだ段階になって，もう一段のひねりが必要になることがわかった．エリオット予想はそのままでは正しくないのである．これはラーダムらによるもので，エリオット予想がうまくいくようにするためには，通常の従順性に加えてある種の正則性が必要になることがわかったのである．この正則性の特徴づけをめぐって最近多くの重要な研究がなされている．

この分類理論における基本的な不変量 $K_0(A)$ について意味を考えてみたい．X がコンパクトハウスドルフ空間の時，$K^0(X)$ の元はだいたいは，X 上の (複素) ベクトルバンドルである．このことの対比を $K_0(A)$ で考えると，その元は大体，A 上の有限生成射影モジュールである．前についている形容詞はこの際無視すると，重要なことはモジュール，すなわち A が作用するベクトル空間ということである．この意味で，$K_0(A)$ の元は，だいたいは A の表現であり，$K_0(A)$ は表現論的な不変量である．「表現論的な不変量」と言っているのは，各モジュールの同値類と，足し算 (モジュールの直和) の規則だけを取り出して，各モジュールがどんな (無限次元) 空間でどんな風に C^* 環が作用しているのかは忘れてしまう，という意味である．ただし，一番素直な意味で C^* 環の表現と言えば，(元々とは別の) ヒルベルト空間への作用であるはずで，ここではこれとは違う種類の表現論を考えていることに注意する．ヒルベルト空間への作用という素直な意味での表現論を考えても C^* 環の不変量を作ることができるが，これはたいてい複雑すぎてコントロールできないので，分類理論にはあまり役立たないのである．もう一つ $K_1(A)$ も不変量なのだが，これは適当な意味で K_0 に帰着させることができるので，ここでは説明は省略する．この意味で，エリオット予想 (の修正した形) は，「単純従順 C^* 環が，さらにある良い正則性を持てば，K 群的な不変量で完全に分類できる」というものである．この予想はまだ完全な形では証明されていないが近年の多くの重要な貢献により，この分類理論は最終段階に差しかかっていると考

えられている．

さてここでフォンノイマン環の分類理論に話を戻そう．従順単純フォンノイマン環を分類する不変量は，ウェイトの流れであった．これを見ると，あまり表現論的な不変量に見えないが，次のように解釈すれば表現論的に見ることができる．まず，フォンノイマン環上の正の汎関数を使えば GNS 構成で表現が作れるのであった．逆に表現から正の汎関数を作ることもできる．そこで表現そのものを考えるかわりに正の汎関数全体を考え，その上に近似的なユニタリ同値の関係を導入すると，ウェイトの流れが構成できるのである．これはもともとのコンヌ竹崎の方法とは少し異なり，ハーゲラップ・スターマーによるものだが，本質的には同じことである．これによって，フォンノイマン環の分類の不変量も K 群と似たものであると解釈することができる．なおこちらも，表現というものをもっと素直にヒルベルト空間への作用と解釈することができるが，今度は C^* 環の時とは逆に，あまりに簡単に分類できてしまうので，そのままでは分類の不変量として役に立たないである．

この種の表現論的な視点は，ジョーンズの部分因子環の分類理論でも大活躍する．すなわち，適切な意味での従順性と単純性があれば，表現論的な不変量が完全不変量になるのである．この表現論的な不変量は，現在の立場からはある種のテンソル圏と思うことができる．

なお，ヒルベルト空間上の $*$ 演算で閉じていない作用素環，あるいはさらにバナッハ空間上の作用素環についても分類問題を考えることはできるが，フォンノイマン環や C^* 環の時のような美しい分類理論は全く知られておらず，そのような理論が眠っているという兆候もまったくない．ヒルベルト空間の正定値内積という構造が美しい分類理論をコントロールしているのである．

6. 量子力学とユニタリ性

最後に量子物理学との関係において，ヒルベルト空間の果たす役割にふれておこう．私の研究対象は，作用素環論の数理物理学，特に共形場理論とその関連への応用なので，これが直接私の研究に対応するものである．

量子力学では状態の空間がヒルベルト空間をなし，観測可能量は自己共役作用素で表される．ヒルベルト空間がなければそもそも何も始まらない．ただし，作用素に当たるものの抽象的な環が先に与えられた時にそこからヒルベルト空間を作るのが，上に述べた GNS 構成法で，これによって状態の空間が作れるという状況もよくあるので，ヒルベルト空間が先に与えられるか，(作用素の) 環が先に与えられるかは場合による．

2 次元共形場理論では，作用素環を用いた研究法のほかに，より代数的な方法に基づく頂点作用素代数の理論がある．この両者の関係も私の研究テーマなのだが，頂点作用素代数の方から対応する作用素環の理論を作ろうとすると，状態の空間と呼ばれるものをヒルベルト空間にする必要があり，このために適切な正定値内積が必要である．しかし頂点作用素代数の理論は代数的なもので，通常の公理ではそのような内積の存在は仮定されていない．通常の公理に加え，よい内積が入ることをユニタリ性という．対応する作用素環の理論を構成するにはこのユニタリ性を仮定しなくてはならないのである．重要な具体例の多くはユニタリ性を満たしているが，これを満たしていない例もまたたくさん知られている．満たしていない場合でも何か作用素環と関係があるのではないかと考える人もいるが，今のところヒルベルト空間が作れないので，数学的対応は何も知られていない．その他，テンソル圏などの代数的構造の研究にもこの種のユニタリ性が重要な役割を果たしており，純代数的な立場からは仮定しなくてもよいものだが，物理的な対象との関係を見るにはユニタリ性を仮定する必要があり，これによってヒルベルト空間との対応が導かれるのである．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）