分類分けという発想

河東 泰之

科学者は分類することがしばしば好きである．近代科学は分類することから始まったと言ってもよいようなものだ．もちろん数学者も分類が好きなことがしばしばある．そもそも，数学，物理，化学，... なども近代になって分類されてできたものである．(もともとは哲学も一緒であった．) そして数学の中でも，代数，幾何，解析といった分野に分類され，それぞれの中でも細かく○○理論のように分かれていく．本来数学 (と理論物理の数学的な部分) は一体のものであり，人工的に分類してもかえって不自然になることも少なくないが，さまざまな都合によって分類されてしまうことが多い．私の専門の作用素環論も通常は解析に分類されており，実際に講義で教えるような内容とのつながりで言えば，ルベーグ積分，フーリエ変換，関数解析と言ったものから自然に続いており，私も講義を担当するときはこういった科目を教えることが多いが，実際の研究では，有限群論も代数幾何学も 3 次元トポロジーも表現論も確率論もみな関係しており,「解析学」の枠に閉じ込めてしまうことにはあまり意味がなく，かえって有害でさえある．

またその数学の○○理論の中でも分類理論が大きな地位を占めていることが少なくない．こちらは数学的な動機に基づいているので分類しようとするのはなんら不自然なことではない．よくあるのは，ある数学的な対象 (たとえばリー群) について，○○型と名付けていくつかのクラスに分ける，あるいは「○○の性質をもつもの」と言って特定のクラスを取り出して研究するというものである．さらに順番に名づけて，I 型，II 型，... と分けていくこともよくある．これらはある程度粗い分類であることが普通で，例えば II 型の○○はとてもたくさんあって，さらにその中でまた分類したりするわけである．

もっと望ましいとされているのは，何らかの数学的対象 (たとえば多様体) に対して，何かもっと簡単な量 (たとえばアーベル群) を対応させてそれによって，(ある自然な基準で) 分類できる，と言った理論である．このように対応させる量を不変量と言うが，それによって完全な分類が可能である時，完全不変量といい，しばしば高く評価される．つまりある数学的対象が「同じ」であるかどうかを判定するには完全不変量を計算してそれが「同じ」であるかどうかで決めればよい，という場合である．対象となる範囲が広いほど，また不変量が簡単であるほど高く評価されることが多い．

しかし完全不変量であっても，あまり計算しにくかったり，不変量自体が複雑で同じかどうかの判定が難しかったりすると，分類定理とはあまり言いにくくなってくる．たとえば私の専門の作用素環論で言えば，可換 C^* 環は，そのスペクトルと呼ばれる完全不変量 (コンパクト・ハウスドルフ空間) によって分類されるが，コンパクト・ハウスドルフ空間が同じ (同相) であるかどうかを判定するのは困難なので，通常はこれは分類定理とは

みなされていない．

一方単射的因子環という作用素環は (トリビアルなものを除き) ウェイトのフローというコンヌ・竹崎の不変量によって完全に分類される．この不変量はエルゴード・フローなので全然簡単な数学的対象ではないし分類しやすくもないのだが，通常この結果は偉大な分類定理とみなされている．

さらに進むと，完全不変量があることを証明することでは満足せず，対象を完全に列挙しようということを考えることがある．たとえば有限単純群の分類というのは完全なリストが完成していてこれで全部だ，というのが中心結果である．誰しも思いつきやすいものでリストが尽くされていたとしたらなんだか面白みが乏しいが，有限単純群の場合は 26 個の例外があり，しかもそれで全部だ，というのが興味深いところである．しかもその中で一番サイズが大きいものがモンスター，すなわち怪物という固有名詞がついているものであり，これがとうてい関係あるとは思えないような他の数学分野と深遠な形で結びついているというのがムーンシャイン予想である．(すでにボーチャーズによって解決済みなのでもう予想ではないが．) 私は自分がやっている数学がこういうことと関係しているとは昔は全く考えてもいなかったが，最近はいろいろな関係があることがわかり，前は全く話が通じないと思っていた数学者，数理物理学者たちと話が通じることがあるようになったのがうれしい．

完全分類理論，特にリストを列挙した結果というのは偉大な成果であることは間違いないのだが，そこで終わってしまうと，もう先はありませんよ，と言っているようでさびしいところもある．しかし完全に分類しようとする努力の中で，何か全く新しいものに遭遇し，そこから新しい数学が発展していくと言うことが時々あり，そちらの方が面白い展開のように感じる．

私が前に研究していた (そして今でも少しはしている) 部分因子環論では，完全分類を目指す努力の過程で，これまで誰も見たことのなかった数学的構造の例が現れた．量子群や共形場理論ときちんと対応がつく部分因子環はたくさん知られており，よく研究もされており，大変重要な例であることは間違いないのだが，まったくそういうものとはかけ離れたように見える例が散発的に見つかっているのである．これらは今のところ他の数学とは離れた特殊な構造ということになっているのだが，本当は深い関係があることは間違いないと思われる．たとえば，これらの例は 3 次元閉多様体の複素数値不変量を生み出すが，それらにどのような幾何学的意味があるのか全く分かっていない．またこれらに対応する共形場理論が存在すると私は強く信じているがそのようなことは全く証明されておらず，ごく部分的な兆候のかけらが知られているだけである．そもそも部分因子環論を創始したジョーンズは分類を目指していたわけではないと思うが，結果的に様々な分類定理に結びついて意外な構造の発見につながったのである．ジョーンズ本人自身ももともと結び目理論との，きわめて予想外の新しい関係をジョーンズ多項式の発見によってもたらしたのであった．

分類理論はしばしば当然目指すべきものとされ，なぜ分類したいかは問われないことが多い．しかしどちらかというと，分類理論は分類しようとする努力によって生み出された手法，その経過で発見された新しい例や現象の方が長期的に見れば数学の発展にとって有意義なのではないだろうか．たとえばポアンカレ予想は，これこれの条件を満たすものは球面しかありませんよ，と言っているのだから，何も新しいものはないという種類の結果である．だから結果自体は (明らかに重要だが) 面白みに欠けるという言い方もできる．しかし，解決の過程で考え出されたさまざまな新しい手法が今後長い間数学の発展を支えていくのであろう．

分類理論ではどんどん話が細かく細かくなっていくことがよくあるのだが，一方ではそういう努力の結果として「数学は一つにつながっている」という実感が得られることが (ときどきでも) あるのが数学研究のすばらしい点であると思う．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）