

von Neumann, Connes そして Jones

河東 泰之

1. はじめに

竹崎氏に続き、私も作用素環論の立場から物理学との関連について書いてみたい。作用素環論がその成立の当初から理論物理学と密接な関係を保っていたことは明らかである。このうち、von Neumann と Connes の貢献については竹崎氏による原稿に譲ることにして、私は Jones について書くことにしよう。

ただ最初に、Murray と von Neumann がごく初期の短い間に、独走状態で現在まで続く大きな枠組みやアイデア、テクニックを生み出したこと、Connes はさらに短い 20 代の数年間に、ありとあらゆる奇跡的な業績をあげて作用素環論を一新させたことを強調しておきたい。本当に大きな方向転換というのはごく短い期間で起きるものなのかもしれない。

2. Jones と物理学への期待

Jones はニュージーランドで学部を卒業し、スイス・ジュネーブに大学院生として留学した。当初は理論物理学を学ぼうとしていたのだが、つく予定になっていた先生が、彼のジュネーブ到着直後に急死してしまったのである。そのため数学に代わり、トポロジーで有名な Haefliger の指導を受けることになった。しかしニュージーランド時代から作用素環論の基本的なことは知っており、興

味は持ち続けていたとのことである。その後、院生時代に上記の Connes の革命的業績を知り、自分もその方面で研究を進めることを決意した。実際、Jones の初期の研究は Connes の理論を一般化するものが中心であった。この間、数理物理学との関係は薄れてしまったように見えたが、のちに長い時間と経路をたどって再び数理物理学との密接な関連が現れてくるのである。

3. 部分因子環と Jones 指数, Jones 多項式

ガロア理論は体とその拡大体との関係を扱う。作用素環とその拡大環でも同じようなことを考えることはできるのだが、形式的な類似を超えた本質的に新しい現象が現れる。その最初の例が、拡大次数に当たる数 (Jones 指数と呼ばれる) がもはや整数とは限らなくなることである。単純環に当たる基本的な作用素環は von Neumann の命名で因子環とよばれており、拡大環より部分環を考えた方が取り扱いが簡単なので、この理論は部分因子環論と呼ばれる。Jones はこの理論のすべての基礎的なアイデアを、1980 年代前半の彼が 30 歳前後だったごく短い期間に一人で考え出した。さらにそれが、Jones 多項式の発見を通じて結び目の研究に役立つという衝撃的な応用があり、1990 年のフィールズ賞に結びついたわけである。

4. 代数的場の量子論

一方、数理論物理学では場の量子論が大きなテーマであり続けている。物理学の理論としては大きな成功をおさめ、現在も大きく発展中であるが、数学的な立場からも重要な問題の宝庫である。数学的に厳密な取り扱いはたいへん難しく、さまざまなアプローチが提唱され、研究されているが、その中で、作用素環論に基づくものが代数的場の量子論と呼ばれており、過去 50 年ほどにわたって研究されてきている。「量子力学の数学的基礎」を書いた von Neumann がその数学的研究をするために導入した枠組みを、素直に場の量子論の研究に適用しようとしたものと言えるだろう。

これは Jones 以前からさまざまな研究が発展していたのだが、Jones の見出した部分因子環の理論、特に Jones 指数の概念が大変有効であることが 1980 年代後半に明らかになった。

その後、Wassermann と共同で考えた枠組みも、Jones によれば代数的場の量子論のことは全く考えずに始めたということであったが、代数的場の量子論、特に共形場理論において重要な例の構成法であることがはっきりしてきた。これは現在もさかんに研究されている重要なテーマである。

このように、Jones の若いころの理論物理学への興味は長い回り道を経て、現実のものとなったのである。

5. 頂点作用素代数

上述の共形場理論の数学的研究では、頂点作用素代数と呼ばれる純代数的公理系もあり、先行して研究されてきた。特に位数最大の散在型有限単純群モンスターと、それに関連したミステリアスな予想、ムーンシャイン予想 (Borcherds が解決してフィールズ賞を受賞した) から生じる一例が大変有名かつ重要なものである。これについても現在は作用素環論の手法で研究できることがわかっている。作用素環論の枠組みで一般論、特に表現論的な手法を展開しようとした場合、Jones 指数

の理論は必須の道具であり、これに当たる概念を自然な形で一般的に定義することができないことが、頂点作用素代数の理論で問題になっている。

頂点作用素代数の代数的な手法が有効な局面もたくさんあり、作用素環的アプローチと、頂点作用素代数によるアプローチとの関係は Lie 群と Lie 環の関係のようなものであるはずで、きれいな対応関係が確立されるべきなのだが、なかなか難しい問題が山積しており、完全解明への道のりはまだまだ遠い。

6. その人となり

Jones は豪快な性格でいつもラフなかつこうをしている。京都でのフィールズ賞授賞式の際も式の後すぐにネクタイを外してしまった。フィールズ賞の金メダルをパーティーで投げて遊んでいたのも覚えている。ウィンドサーフィンが趣味で、ホームページにもその様子の写真がポストされている。もう 60 歳に近づいているが、一般の人が想像する「偉い大学者」とは全く違った印象の人である。私が初めて彼に会ったとき、彼は 30 代前半だったのだが、今も受ける感じは全く変わらない。これほどものごとにとらわれず、自分独自の考えを貫く人だから、このような革命的な業績が挙げられたのかもしれない。

最近カリフォルニア大学パークレー校から、ヴァンダービルト大学に破格の条件で移動したが、そのためさらに自由に行動できるようになったようである。これからもさらに自由な発想で研究を続けていくことだろう。

(かわひがし・やすゆき, 東京大学大学院数理科学研究科)