書 評　ε-δ 論法再入門

直観から論理へ

中神祥臣著，B5 判，168 頁，本体 1857 円，サイエンス社，SGC ライブラリ 71

題名の通り，この本は ε-δ 論法への「再」入門である．ε-δ 論法は，微分積分学を現代的に展開する際のもっとも基本的な論法であり，伝統的に大学の理工系課程の第 1 学年で教えていたが，近年では，わかりにくい，実用的でないなどの批判を受け，教えない，選択に回す，もっと後の学年に回すなどの対応が多くの大学で取られている．東大でもかつては理系のすべての学生に対し，第 1 学年の必修講義の中で教えていたが，今では理学部・工学部に進学するコースでの選択必修科目として教えている．

微分積分学を全く学んだことがなくてこの本を手に取る人はいないと思うが，ε-δ 論法については，ちゃんと習わなかった，習ったがよくわからなかった，忘れてしまった，などの理由により，きちんと身についていないが，あとになって必要性を実感して，もっとよく理解したいということはよくあるケースであろう．また大学初年級で，ε-δ 論法を始めて学ぶ際にも，通常の微分積分学の本や講義の中での短い説明ではなかなか理解できないということもよくあると思う．この本は，この論法をきちんと理解するということに焦点を絞った特色ある本である．

極限操作は論理的になかなか微妙な問題を含んでおり，深く考え始めると何かだまされているような気がしてくる「証明」も少なくない．また，いい加減な直感に頼っているとすぐに間違った結論に導かれてしまう．ε-δ 論法はこのような問題点を解決する方法として，長い歴史の間に確立された強力な方法であり，数学理論においてたいへん有用なものなのだが，学び始めの段階で，なぜこんな回りくどいことをしなくてはいけないのかわからない，という印象を持たれやすい．

数学における証明というものには，誰でもある程度の経験があるが，通常は，あまり明らかでないものをより明らかなことに帰着するものである．しかし厳密な微分積分学に初めて触れると，何が「より基本的なこと」なのか，直感的にあまり明らかでない．たとえば，本書系 6.10 にある，「微分して定数 0 になれば，元は定数関数」という事実は誰でも知っており，普通は「接線がまっ平らなのだから定数関数になる」と理解している．数学的な証明は，本書にもあるとおり，平均値の定理に帰着させるもので，その平均値の定理は最大値の定理から導かれる．最大値の定理は，コンパクト性と連続性に基づく基本的な定理であり，もっと先まで学べばその重要性は明らかだから，このような理論的証明法はまったく正当なものだが，初めて学ぶ人にとっては，このようなやり方の意義がすぐにはわからない．なんだか明らかなことを，わざわざ回りくどくしているだけのように感じられるわけである．

そこで本書では，多くの例を挙げ，ゆっくり話を進めている．このような本を書こうとすると，話をどこから始めるか，実数の連続性について何を認め，どのように説明するか，記号論理についてどのように説明するか，といったことについてよく考える必要があるが，本書では長年の経験に基づいた，ていねいな説明が与えられている．

まず，最初は ε-δ 論法に基づく数列の極限の定義であり，その意味の説明，使い方などが続く．この第 1 章の後，実数論が始まる．実数の連続性の公理には，「単調減少する閉区間の列の共通部分は空ではない」を採用している．ここから，上・下限，上・下極限，コーシー列などが説明されていく．ここまででも命題論理は実質的に使っているわけだが，ここで初めて一章とって，命題論理が詳しく説明される．この配列は教育的配慮によるものであろう．私も何度か微分積分学を教えたことがあるが，学生が命題論理に慣れるにはかなりの時間と手間が必要なものである．命題の否定を取るのは，何も考えなくても機械的にできるわけだが，東大でもいくら言ってもなかなかできるようにならない学生がかなりいる．ここまでで全体の 3 割ほどのページ数を費やすていねいなペースで，この後，関数の連続性に入り，通常の一変数の微分積分学が展開される．(偏微分や重積分は本書の対象外である．) また，有界関数のリーマン積分可能性に関するルベーグの定理など，あまり初年次には学ばない話題も入っている．

問題の解答もすべてついており，本書は厳密な微分積分学をきちんと学びたいという強い需要に答えるたいへん有益な本であると言える．

河 東　泰 之（東京大学大学院数理科学研究科）