微積分の力を身につけるには

河 東　泰 之

1. はじめに

言うまでもなく，微積分学はあらゆる数学の基礎であり，世界中の高校，大学などで教えられている．本号は，大学で学ぶ微積分のポイント，他の自然科学や経済学での使われ方についての特集である．

日本では高校数学でそれなりのレベルの微積分を教えており，理科系の大学新入生は基本的な微積分を学んだ上で大学に入ってくる．経済学部等でも入試に数学を課していれば，多項式の微積分程度は高校で学んでいる．学力低下でろくに身についていないという意見もあるが，とりあえず，これだけの数学を高校で学んでいると言うことは立派なことである．アメリカでは一流大学でも，全く微積分を学んだことのない大学新入生はごくありふれた存在である．理系では数学は受験の際の中心科目であるので，かなりの時間をかけて高校で微積分を学んだ学生も多いはずである．その上大学での微積分は何を学ぶのであろうか．

まず誰が見ても明らかな違いは，関数の変数の数が増えることである．高校では，変数 x の関数 $f(x)$ を学んだが，大学では変数 x, y の関数 $f(x, y)$ や，さらにもっと変数の多い関数，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を扱う．極値を求めたり，面積，体積を求めたりするのが，高校微積分の中心テーマだったが，大学でも，同様の問題を複数の変数を持つ関数について考えることになる．微積分とは変化する量を扱う学問であり，実用的な状況を考えれば，理工学でも経済学でも変数がたくさんあるのはごく普通の当然の状況である．現実世界の量が一つのパラメータにしか依存しないほうが例外であろう．これについては平地先生の記事で解説していただいた．大学１年生の数学の講義ではこれらの話題にいきなり入ることもあるが，一変数の話題に時間を費やすケースもよくある．どちらであっても，物理や化学の講義では，複数の変数を持つ関数の微積分を最初から使うことが多いので注意が必要である．カリキュラムの組み方があまりよくないと思うが，物理や化学のほうからすれば，数学で教えるのを待っていては間に合わないということであろう．

このように変数が多い場合について新しく学ばなくてはいけないことは明らかだが，一変数の関数についても高校で学んだことだけでは理論上も応用上も不十分である．

応用上不足している一番の点は，テイラー展開，すなわち関数を整級数で近似する方法である．もともと微分というのは，関数を１次式で近似する手法である．さらに精度を上げて，２次式，３次式などで近似することができる．実用上は，たいていの関数をこのように無限級数，あるいはそれを途中で切った多項式で近似することが多いので，これを学ぶことはあらゆる応用で必要である．また理論的な立場からも，高校以来よく知っている，$\sin x$, e^x などがきれいな式の無限級数で表される

ということは驚異的な事実である．またこれによって，まったく別々の関数と思っていた，指数関数と三角関数が本質的に同一の関数であることも明らかになる．さらに,「自然」対数やラジアンがなぜ自然なものかも本当に明らかになるのはテイラー展開を学ぶことによってである．

さて，今理論的な立場と言ったが，微積分を厳密な理論的立場から展開する一連の理論がある．基本的な論法の名前から，しばしば，ϵ-δ 論法と呼ばれるものである．高校では直感的に明らかとされていた，極限や連続性の概念を基礎に立ち戻って，一から議論するものである．伝統的に多くの理工系の数学で１年生から教えられていたが，難しすぎる．応用上重要でないといった声に押されて，どんどん教えている大学が減ってきているようである．しかし，数学やそれに近い理論科学において，必須の基本的な論法であることに変わりはなく，そのような分野に進む人は必ず越えなければならない関門である．これについては，金子先生に解説を書いていただいた．金子先生の記事にもあるように，情報科学科でも，むしろ難しい微積分の計算より論理的な側面のほうが重要であることも多いようである．実際の計算はどんどんコンピュータがやるようになっており．三角関数の入った複雑な積分計算が手でできなくてはいけない状況というのはまず考えられない．しかし，コンピュータを扱うのには，さまざまな論理的な構造がきちんどわかっていなくてはいけないことはよくあるのである．入学試験を採点したり，大学で教えていたりしても，こういった論理が非常に弱い学生がたくさんいる．計算問題だと相当面倒なものでも，根性でがんばって，しかもちゃんとできる人はかなりいるのだが，論理的なことになるととたんに怪しくなり，背理法で何か証明しようとするときに，結論の否定命題を正しく書けないという人は驚くほど多い．それは，何か勉強の方向が間違っているように思う．

さて，微積分は，その発祥以来さまざまな応用と密接に結びついて発展してきた．大学生も数学科で微積分を使う人より，理工系で微積分を将来実用的に使う人のほうがずっと多い．それらの諸科学との関係についても．いろいろ詳しい記事を書いていただいている．物理学，工学との関係が深いことは誰でも知っているであろう．もっとも高校の微積分では，そういう結びつきを極力表に出さないような変な教え方をしているのだが．これらの結びつきのうち，力学との関係について，岩井先生に，工学との関係については吉野先生に超関数の話を書いていただいた．

それほど誰でも知っているというわけでもないかもしれないが，ファイナンスへの応用と，その基礎となる確率論についても．中川先生，乙部先生に書いていただいた．数理ファイナンスは最近の金融危機でも大きなスポットライトが当たってしまったが，もちろん，数学をより正しく使うことがこれからの道であり．数学を使わない時代に戻ることはできない．この方面ではむしろ工学より高度の数学を応用している場合がしばしばある．

確率論は，そのファイナンスへの応用の基礎であり，またその他の諸科学への応用の基礎でもある．世の中には，きっちり未来を見通せる話はあまりなく，確率的にしか見通せない話の方がずっと多いことは誰が見ても明らかであろう．高校までの，確率は，さいころを振ったり，カードを抜いたりする話が大半で，場合の数を正しく数えることが基本である．そのため，微積分と関係しているという気があまりしないかもしれないが，世の中の現象が連続的にランダムに変動している様子を数学的にきちんと扱うのには，微積分が必要である．現代確率論は，積分の理論が基礎になっており，そこで確率微分方程式と呼ばれるものを扱うことになる．

そのほか，より進んだ話題として，ファインマンの経路積分と呼ばれる方法が，現代理論物理学で基本的な手法になっている．これは通常の積分よりかなり「高級」な話題だが，基本的な考え方は積分の延長上にあるので，前野先生に解説していただいた．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）