特集／可換から非可換へ

数学における非可換性

河東　泰之

1. はじめに

数学において基本的な演算は言うまでもなく，小学校以来の加減乗除である．このうち，明らかに引き算と割り算は二つの引数について対称ではなく，残りの足し算と掛け算については，可換性，すなわち交換法則が成り立つことは誰でも知っている．このうち足し算はどのように一般化して行ってもいつでも可換なままである，というか可換でなければ加法とは言わないが，掛け算の一般化はたちまち可換でなくなる．初等的な数学でこれが最初に現れるのは行列の積か，あるいは有限群における積であろう．一つの行列も群の元も，ある種の変換すなわち作用と思うことができる．行列はもちろんベクトルにはたらく 1 次変換と思えるし，有限群はみな置換群に埋め込めるのでその元は有限集合上の置換操作と思えるからである．すると積演算は作用の合成ということになり，その結果が合成の順番によるのはむしろ当たり前である．日常生活においても，A をやってから B をやるのと，逆の順番にやるのとで結果が異なるのはまったく普通のことである．(もちろん，どちらでも同じ結果になることもたくさんあるが.）この立場から見ると，普通の数は,「その数を（別の数に）掛ける」という操作を表していると考えられるので，の掛け算が可換だということは,「3 倍してから 5 倍するのと 5 倍してから 3 倍するのは同じだ」ということである．

これを一般化したのが関数空間における積の可換性である．関数空間を考えるときには，状況によって，しかるべき構造を持った空間，つまり，測度空間，位相空間，多様体などを考え，それに応じた性質を持った関数，つまり，可測関数，連続関数，微分可能関数などを考える．そういった関数同士を足したり掛けたりすることができ，掛け算が可換になっているわけである．ここで可測性その他の性質は無視して単純に考えれば，各点における値同士を足したり掛けたりしているわけだから，実際にしていることは数の足し算や掛け算であって，点というのは単にパラメータだと思うことができる．つまり，関数というのは，点というパラメータのついた数の族だということである．こう思うとまた，関数は別の関数に掛けるという作用を持っていると思うことができ，この作用が合成についても可換になっている．つまり,「$f(x)$ を掛けてから $g(x)$ を掛けるのも，$g(x)$ を掛けてから $f(x)$ を掛けるのも同じだ」ということである．ここでももっと一般的な，関数への作用をを考えれば，合成が可換でないことはまったく当然のことに過ぎない．このように，関数（による掛け算という作用）を一般の作用に取り替えて，合成が可換でないものを考えないといけないということが，非可換性の根本である．そしてこのような作用を一般に考えるため，線形作用素を考え，それらを足したり掛けたりできる集合を考えるのが，私の専門である作用素環論という分野である．この

ように関数環を作用素のなす非可換環に取り替えることによって，通常の空間概念を超えた理論が展開できると言うことが「非可換○○」の基本的なアイディアであり，その集大成が Connes による非可換幾何学の本[1)]である．しかしあまり一般的なスローガンばかり言ってもも仕方がないので，以下では私が直接関係している二つのテーマを具体的に取り上げることにしよう．いずれのテーマも，背後には数理物理学，特に場の量子論があるのだが，ここでは数学的側面を中心に進める．

2. ガロア群と量子化

代数学において，ガロアの逆問題と言われる問題がある．与えられた有限群がある体上のガロア群として実現できるかどうかを決定せよという問題で，有理数体上のときですら，いまだに完全には解決されていない．ここに現れる群はいくらでも非可換になるが，体の方は定義によって積が可換である．一般にガロア群やその表現を考える際に，可換群から非可換群に対象を広げるということは重要な考えであるが，ここでは体の方を積が非可換なものに取り替えることを考えたい．もちろん積が可換でない体（斜体）というものもあるが，ここで考えるのはそういうものではなく，作用素のなす環である．逆元の存在に関する要請を弱めて，体から環に変えて，積の可換性もやめたのである．このような状況で，体と拡大体のかわりに環と拡大環を考えることにする．大きい方の環の自己同型で小さい方の環を動かさないもの全体と考えることはまったく問題ないのでこれによってガロア群が定義できる．体論では通常小さい体の方を固定してそれを拡大すると考えるが，作用素環論では，典型的な状況では大きい環と小さい環は同型になることもあり，大きい環を固定した方が見やすくなることが多いので，通常そのようにして，作用素の環のさまざまな部分環を調べるという理論を作る．これが Jones の subfactor (部分因子環) 理論である．Factor (因子環) とは，単純な，すなわちイデアルが自明なものしかない von Neumann 環 (作用素環の一種で C^*-環より狭いクラス) のことである．von Neumann がこのような名前をつけたので単純 von Neumann 環と呼ばずにこのように呼ばれる．Factor の中にある別の factor が subfactor である．この状況で，体の拡大次数に当たるものが Jones 指数である．体の拡大次数は (有限ならば) いつでも自然数であるが，Jones 指数はそうではなく，たとえば $4\cos^2 \pi/n$ といった値を取る．このことを指数の量子化と言うこともよくある．もともと，連続の値を取るはずの物理量がとびとびの値しか取らなくなることを量子化と言ったが，ここでは反対に，もともと自然数の値しか取らなかったものが一般の実数値を取るようになることを量子化と言っているのである．これだけ見ると変な気もするが，体を非可換化することによって，次数のような量も必然的に非自然数の値を取らざるを得なくなったと言うことが重要である．

さて上で述べたガロアの逆問題を Jones 理論で考えてみよう．作用素環を一つ固定し，有限群が与えられたときにそれがその作用素環のガロア群として実現できるか，という問題である．ただし上のようにガロア群を定義すると，自明でない，すなわち指数が 1 でない部分環についてもガロア群が自明になってしまうことがいくらでもあるが，もっと条件を追加することによって，より自然な「ガロア群としての実現」を考えることが必要である．このような設定にすると，ガロア対応，すなわち部分群と中間環の対応もうまくいく．このように設定した上で上の「ガロアの逆問題」を考えると，これは作用素環として何をとるかに依存し，完全に一般的な作用素環に対しては絶望的に難しい問題であるが，Jones 理論におけるもっとも自然な作用素環と思われるもので，von Neumann が構成した hyperfinite II_1-factor と呼ばれる作用素環については，すべての有限群について一気に肯定的に解けてしまう．このことは，非可換化したことによって問題が簡単になった，と言うことができ，それ自体重要なメッセージを含んでいるが，もっと重要なことが起きているのである．まず上

記の hyperfinite II_1-factor の場合について，有限群を一つ固定したときにそれをガロア群として実現する部分環はどれだけあるか，という問題が考えられるが，その答えは一意的である．これは Jones の博士論文の結果であり，これが彼の理論の出発点となった．これも「非可換化したことによって現象が簡明になる」ことの一つの例であるが，代数系としては依然通常の群論の世界にとどまっているとも言える．上記のような「自然なガロア群」の状況では Jones 指数はガロア群の位数となり自動的に自然数になってしまうのだが，一方 Jones 理論のポイントは指数が自然数でない場合にあるのであった．したがって，Jones 指数が自然数でない場合の部分作用素環については,「ガロア群の位数を自然数ではなくしたもの」が現れると期待できる．このことを最初に明確にとらえたのが Ocneanu の paragroup 理論であった．これについては私の本[2] に詳しく，また前に記事[6] にも書いたが，より最近の視点からもう少し書いてみよう．

Ocneanu によるもともとのフォーミュレーションは，可解格子模型によく似たものであった．また，有限グラフ上の幾何学といった見方も強調され，flat connection と言った用語もこの見方に基づいて名づけられたものである．今でも実際に具体的に計算しようとすると，この見方がもっとも適切であるということは変わっていない．しかしその後，理論的な立場から見ると，テンソル圏としての見方がより自然で，他の分野との相性もよいことがわかってきた．テンソル圏というのは抽象的にはなんだか物々しいが，ここで扱うような状況においては，その形式的な定義はまったくたいしたものではない．すなわち，コンパクト群のユニタリ表現と似た性質を持つ形式的な対象がいくつかあり，それらの間にテンソル積と呼ばれる，ユニタリ表現のテンソル積を抽象化した演算があり，インタートワイナーと呼ばれる，やはり群の表現の場合のインタートワイナーを抽象化したものがあり，さらに既約分解や次元の概念を抽象化したものがあるようなものである．ただし，群のユニタリ表現の場合は，$\pi\otimes\sigma$ と $\sigma\otimes\pi$ は明らかにユニタリ同値だが，これにあたるテンソル積の可換性はもはや成立しないのと，次元にあたる量がもはや自然数ではないということが重要である．この状況を一言で言うと，環が非可換化することに伴って，自動的にガロア群もより一般的なテンソル圏に変化する，ということである．これは非可換数学の一つの重要なケースである．量子群や，頂点作用素代数でもよく似たテンソル圏の構造を考えており，特に基本的に重要な例は，Kac-Moody 代数や，Virasoro 代数などから生じるものである．

もともと Jones 理論が作用素環論の外で有名になったのは，Jones が彼の有名な結び目の不変量，Jones 多項式を，彼の subfactor 理論から導いたからであり，Jones はこれによって 1990 年のフィールズ賞を受賞した．これを一般化した，結び目や多様体の不変量の理論は低次元トポロジーにおける量子不変量の理論として大発展をとげており，上のテンソル圏の話もこの量子不変量に関連してよく研究されている．たとえば，このテンソル圏は一般に braiding と呼ばれる構造を持たず，したがったただちには結び目の不変量を作り出すことはできないのだが，どうやって braiding を作り出すか，また，braiding 構造がどのくらいたくさんあってどうやって分類されるか，などもこの枠組みで研究されている．量子不変量についての大部なテキストとして Turaev の本[9] がある．

3. 頂点作用素代数と作用素環

さらに別の非可換代数系として，頂点作用素代数と作用素環の関連についてふれてみたい．頂点作用素代数は，物理学に現れる頂点作用素のなすある種の代数を公理化したもので，有名なテキストとして，Frenkel-Lepowsky-Meurman によるもの[3] である．しかしその公理系はとても複雑なもので，書くのにかなりのスペースがいるし，また書いても初めて見た人にはまったく何のことかわからないと言うものである．これに関して私は全然専門家ではないのだが，最近作用素環とのい

ろいろな関係について考えているので，非可換数学の一つの例として取り上げてみたい．

もともと物理学において場の量子論というものが長年考えられてきており，特に 2 次元時空において，Poincaré 対称性より高い，共形対称性を要請したものが共形場理論として有名である．2 次元時空の座標を時間変数 t, 空間変数 x としたときに，$t \pm x$ を新たな二つの座標と見ることにより，2 次元時空が二つの 1 次元空間の積に分解される．それぞれの 1 次元空間をコンパクト化したものが円周であるので，円周上で共形場理論を考えることができる．しばしば，カイラルな理論と呼ばれるものがこれである．これは物理的な理論であるが，これを数学的に厳密にある種の代数系として，公理的に研究しようということがずっと考えられてきた．そのようなアプローチの一つとして有名なものが，頂点作用素代数である．もともと場の量子論において，作用素値超関数として量子場を捕らえるという考え方がずっと昔からある．これに基づき，複素平面上の単位円周の上で，作用素値超関数のしかるべき集合を考える．これはあるヒルベルト空間の上にはたらくわけであり，そのヒルベルト空間には真空ベクトルと呼ばれる特別なベクトルがある．よい状況では，作用素値超関数に対し，そのフーリエ級数展開の定数項 (といっても作用素値の超関数なので，定数項も作用素である) を真空ベクトルにほどこすという写像が，単射であってかつ，稠密な値域を持つ．そこで，閉包を取るのは気にしないことにして，最初からヒルベルト空間のかわりにこの稠密な値域を考えると，各ベクトルは上の写像の逆によって，作用素値超関数を与えることになる．作用素値超関数をフーリエ級数展開してその係数を見ることによって，(有界とは限らない) 作用素が可算個現れる．これによって，ベクトルから可算個の作用素を得ることができる．この作用素を別のベクトルにほどこすことにすると，結局，最初に取ったベクトル，後で取ったベクトル，フーリエ級数展開の項の番号を指定するための整数 n の組を決めるごとに，作用素をベクトルにほどこした結果としてのベクトルが決まることになる．少し見方を変えると，整数 n を決めるごとに二つのベクトルに対して，別のベクトルを対応させる写像が決まる，ということだからこの写像をある種の積演算だと思うと，整数 n で番号つけられた可算個の積演算がベクトル空間に入っていることになる．このような状況を頭に描いて公理化を行ったものが，頂点作用素代数である．

もともと相対論的な場の量子論では，光速 (簡単のため 1 とおいてしまう) でも片方から他方へ届かないような二つの時空領域については，互いに影響を及ぼしあうことができないので，しかるべき作用素たちが可換であるという条件が考えられてきた．この種の条件を局所性という．頂点作用素代数の公理系においても，この局所性にあたるものが公理に入っており，重要な役割を果たす．もともと 2 次元時空を分解してコンパクト化した円周が，今考えている空間なので，局所性は二つの作用素値超関数 $T_1(z), T_2(w)$ について，$z \neq w$ のとき $T_1(z)T_2(w) = T_2(w)T_1(z)$ という条件である．今，$T_1(z), T_2(w)$ は超関数なので，このことはいつでも $T_1(z)T_2(w) = T_2(w)T_1(z)$ であるということを導かない．実軸上の通常の超関数論では，超関数 T が，$x \neq 0$ という開集合で 0 であれば，T は δ-関数の有限階微分の線形結合であり，十分大きい自然数 n に対して $x^n T = 0$ となる．これにあたる条件として，十分大きい自然数 n に対して $(z-w)^n(T_1(z)T_2(w) - T_2(w)T_1(z)) = 0$ となるということを，フーリエ級数展開した各項についてしかるべき形で書いたものが，頂点作用素代数における局所性条件である．

さてそのような無限次元代数系である頂点作用素代数において，ガロア群のようなものを考えたい．頂点作用素代数の拡大を考えることはできるが，それは後回しにしてまず，一つの頂点作用素代数の自己同型群を考えることができる．これは通常の群であり，有限群になる場合も無限群になる場合もあるが，前者の場合が興味深い．このような自己同型群がある種のガロア群の類似であるが，このようにして現れるものは普通の群であっ

て「量子化」はされていない．一方，頂点作用素代数の表現論として，モジュールたちを考えることができ，これによってテンソル圏が生じる．これも頂点作用素代数に対するガロア群的な性質を持つものである．これはもはや一般的には群ではない．このように，もはや普通の環ですらない無限次元非可換代数系からは，ガロア群もどきとして二つのものが現れ，両者の間に関係はあまりない．

頂点作用素代数について上のように書いたが，その「複雑な公理」を満たすものが本当にあるのかどうかはまったく明らかでない．実際非自明な例を一つ作って見せるだけでもかなりの困難がある．その基本的な例は，Kac-Moody 代数や，Virasoro 代数から生じるもの，および格子から生じるものである．また，頂点作用素代数がすでにあるときに，それらから新しい例を構成する方法として，テンソル積，コセット構成法，単純カレント拡大，(有限群作用による) オービフォールド構成法などがある．もっとも有名な例は，Frenkel-Lepowsky-Meurman による Moonshine module というものであり，自己同型群が最大位数の散在型有限単純群，モンスター群になる．Moonshine という名前は，月光と思うとなんだか数学用語としてはロマンチックな感じがするが，もともとは英語の俗語で「バカ話，たわごと」といった意味である．その由来は，McKay が最初に，モンスター群の最小の非自明既約表現の次元 196883 と，保形関数 j-関数の 1 次の係数 196884 が「ほとんど同じ」であることに気づいたことから始まる．有限群論と保形関数論は数学の中でとても離れた話題であったので，最初，何か意味があるとは思えない，というのが自然な反応であったが，その後，モンスター群の表現に表れるさまざまな数字が，j-関数と到底偶然とは思えない関係をもつことがわかり，Conway-Norton によって，Moonshine 予想というものが成立した．この際に，とてもありそうもないことということからこの名前がついたのである．頂点作用素代数の自己同型群として，モンスター群をとらえることによって，これに大きく迫ったのが上述の Frenkel-Lepowsky-Meurman の仕事であり，彼らの本[3] に詳しい記述がある．さらにこれをすすめて，Moonshine 予想を解決したのが，Borcherds の 1998 年のフィールズ賞受賞業績である．上のセクションでは，体を非可換化することによって，群が量子化されるということを述べた．この Moonshine 予想についての結果は，量子化されていない通常の有限群論をより深く理解すると言う目的のためにも無限次元非可換代数が有効であると言うことを示している．

さて，上のセクションで述べた無限次元非可換代数は作用素環であった．その基礎には，ヒルベルト空間，バナッハ空間などの関数解析がある．一方，このセクションで述べた頂点作用素代数は無限次元の代数系であるが，純代数的に理論が展開されており，関数解析はまったく現れないし，また「積」が可算個あるので通常の意味での環でもない．表面だけ見ると，作用素環と頂点作用素代数はまったく別のもののようである．ちなみに英語ではこの二つは，“operator algebra” と “vertex operator algebra” なので，日本語以上に言葉が似ており，Internet などで検索をかけると，“operator algebra” を探していても，“vertex operator algebra” が大量に引っかかってくる．私は当初，関係ないものがたくさんひっかかって邪魔だと思っており，“operator algebra” を含み “vertex” を含まないもの，といった検索をしたりしていたが，1 年ほど前から両者はとてもよく似たものだと言うことに気づき始め，最近より明確に両者の関係を理解するようになった．そこで最後に無限次元代数系としての両者の関係についてふれてみたい．

上に書いたとおり，もともと頂点作用素代数は場の量子論を無限次元代数系としてとらえるということから始まっている．一方，場の量子論を作用素環を用いて公理的に研究するというアプローチは，代数的場の量子論と呼ばれ，古くから多くの研究がある．この理論の標準的なテキストは，Haag の本[4] であり，そこでは主に 4 次元ミンコフスキー空間が扱われているが，2 次元時空でこの理論を考えることは問題なく，カイラルな円周上の理論二つに分解することもできるので結局，1

次元円周上で，代数的場の量子論を考えることができる．これについては前に記事[7] を書いたことがあるが，基本的には時空領域ごとにそこで「観測可能」な物理量に対応する作用素たちの生成する (有界作用素のなす) 作用素環を考えるということである．作用素値超関数の立場からは，ある時空領域に台が含まれるような試験関数たちを作用素値超関数をほどこして得られる作用素たちの生成する環を考えるということである．1 次元円周上で考える時には，時空領域として考えるものは単に円周上の区間である．よって，円周上の区間ごとに，共通のヒルベルト空間に作用する作用素の環を考えることになる．少し違う言い方をすれば，円周上の区間によってパラメトライズされた作用素環の族と言ってもよい．このような作用素環の族にしかるべき公理を満たすように要請したものが，代数的場の量子論の研究対象である．これを作用素環のネットと言う．ネットという名前は，族をパラメトライズする有界な時空領域 (あるいはその中で特別な形のもの) が，包含関係について有向族をなしていることから来ているが，円周上で考えている時は円周全体は区間ではないので，区間たちは包含関係について有向族をなしていない．したがってネットという呼び名は不適切であり，cosheaf という名前もあるが，ネットと呼んでしまうことが多い．作用素環のネットの満たすべき公理はいくつかあるが，どれも通常の数学の感覚で容易に理解できるもので，頂点作用素代数のようにこれまで見たことのないような種類の演算というものはない．たとえば，局所性の公理は単に，二つの共通部分を持たない区間があったとき，対応する作用素環の元同士は可換であるということである．区間一つに対応する作用素環は非可換な環で，通常の設定では中心が自明なので，最大限まで非可換であると言えるが，族としてみた場合にはある種の可換性があり，それが全体をコントロールしてよい性質をもたらしているのである．ここに可換と非可換の精密な相互関係が現れている．

さて頂点作用素代数に対しては，自己同型群とモジュールのなすテンソル圏を考えたのであったが，作用素環のネットについても同様のものが考えられる．自己同型群はまったく自然に定義され，やはり有限群になることも無限群になることもある．またモジュールにあたるものは作用素環のネットの表現論だがこれについても Doplicher-Haag-Roberts によってすでに 30 年以上前に理論が整備されている．円周上の作用素環のネットで考えると表現のなすテンソル圏が braiding を持つこともわかっている．Doplicher-Haag-Roberts の理論では一つの表現はある作用素環の一つの自己準同型で与えられる．これによって，テンソル積と呼ばれる演算は自己準同型の合成でい与えられる．このとき，一つの作用素環と，自己準同型によるその像の組を考えると，作用素の環とその部分環が得られ，これによって前のセクションの Jones 理論と関係がつけられる．このことを明確に示したのは，Longo である．また，区間は片方の端点を固定してもう片方の端点を連続的に動かせば，それに応じて連続に変化する作用素環の単調増大族を得ることもできる．こう思うと，上のセクションで述べた subfactor の連続版と思うこともできる．Subfactor の場合は，$N \subset M$ という一つの包含関係だが，Jones 構成法により，

$$\cdots \subset N_2 \subset N_1 \subset N \subset M \subset M_1 \subset \cdots$$

という単調増大列を作れることとの対比である．

このように，一つの頂点作用素代数を考えることと，作用素環のネット一つを考えることはほぼ同じことである．頂点作用素代数の作り方としてあげたもののうち，Kac-Moody 代数や Virasoro 代数から作るものについては作用素環の枠組みでも対応するものが得られている．また，すでにある例から新しい例を作る方法としてあげた，テンソル積，コセット構成法，単純カレント拡大，オービフォールド構成法などもすべて作用素環のネットに対して適用できる．(これらについては，Xu の貢献が大きい．) これに対し，格子から頂点作用素代数を作る方法の対応物が欠けていたのだが，最近，頂点作用素代数における Virasoro frame の

考え方をうまく翻訳することによって，作用素環のネットでも例が作れることがわかってきた．これによってたとえば，Moonshine module の構成においてきわめて重要な，24 次元の Leech 格子に対応する作用素環のネットも構成できる．弦理論においては，これは 24 次元空間を Leech 格子で割った 24 次元トーラス内を弦が動く状況に対応している．しかし，そのような作用素環のネットの自己同型群についてはよくわかっていない．これは表現のなすテンソル圏の理論に比べ，作用素環のネットの自己同型群についての理論があまり進んでいないからである．最も重要な例はもちろん，Moonshine module に対応する作用素環のネットであり，その自己同型群は当然にモンスター群であると思われるが，そのことの証明はまったく明らかではない．これは，頂点作用素代数における可算個の積演算が作用素環のネットでどのようにとらえられるかがわかっていない，したがって特に，Moonshine module から生じる 196883 次元の Griess 代数と呼ばれる非結合的代数についても作用素環のネットからどのように見えるかがわかっていないからである．これは今後研究していくべき重要なテーマである．

これについて，上のセクションにより直接的に関連する問題として，作用素環のネットの拡大の問題を考えよう．作用素環論においては，この問題は，Longo-Rehren による部分因子環のネットとして研究されており，大きいネットの表現論と小さなネットの表現論の関係も一般論がよくできている．これによって作用素環のネットを一つ与えた時，その拡大をすべて与える問題も原理的には解ける理論ができている．そして $SU(2)_k$ や，central charge 1 未満の Virasoro 代数については具体的に解かれている．これには，$SL(2,\mathbf{Z})$ の表現が重要な役割を果たしている．これに関連したことについては多くの研究があるが，最近のものとして，私の論文[8] だけをあげておく．その引用文献表から関連する研究がたどれるであろう．この拡大問題については，作用素環において Longo による Q-system と呼ばれるものを用いるフォーミュレーションが一番昔からあると思うが，最近では部分量子群と言う名前で呼んでいる人たちもいる．この問題を頂点作用素代数の設定に翻訳すると次のようになる．頂点作用素代数 V に対して，その既約モジュールたち $\{M_i\}_i$ を考え，V 自身を V-module と思ったものを M_0 とする．このとき自然数 n_i を使って，$n_0 = 1$ として module $\bigoplus_i n_i M_i$ を作り，これが頂点作用素代数になるようにせよ．この問題については，Kirillov-Ostrik の一般論があり，また特に符号に関連して多くの研究がなされている．

以上，私の関係する話題についてざっと眺めてきたが，有限群のような古典的対象を理解しようとする場合でさえも，無限次元の非可換な代数系が役に立つこと，さらにそのような状況では群ではないようなテンソル圏が新しい対称性の記述として必然的に現れるということが言いたかったことの重要なポイントである．そこには，代数，幾何，解析，また数理物理のさまざまな話題が交錯し，数学は一つだ，というスローガンを現実のものとして感じることができるのである．

参考文献

1) A. Connes, “Noncommutative geometry”, Academic Press, 1994.
2) D. E. Evans, Y. Kawahigashi, “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998.
3) I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, “Vertex operator algebras and the Monster”, Academic Press, 1988.
4) R. Haag, “Local Quantum Physics”, Springer Verlag, 1996.
5) 原田耕一郎,「モンスター　群の広がり」，岩波書店，1999.
6) 河東泰之,「作用素環と量子 Galois 群」，別冊・数理科学，現代数理物理の展開，サイエンス社，2003 年.
7) 河東泰之,「代数的場の量子論の新しい展開 – セクター理論と braid 統計 –」，別冊・数理科学，現代数理物理の展開，サイエンス社，2003 年.
8) Y. Kawahigashi, R. Longo, Classification of Local Conformal Nets. Case $c < 1$. to appear in *Ann. of Math.*, math-ph/0201015.
9) V. G. Turaev, “Quantum invariants of knots and 3- manifolds”, Walter de Gruyter, 1994.

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）