代数的場の量子論の新しい展開
—セクター理論と braid 統計

河 東　泰 之

1. 序論

1984 年，Jones は作用素環論において自ら打ちたてた subfactor 理論[8] の応用として，結び目の新しい不変量，Jones 多項式[9] を発見した．この発見は「量子不変量」と呼ばれる新しい位相不変量の研究を導き，広大な新しい分野を生み出した．Jones 多項式やそれを拡張した多くの位相不変量の定義については現在ではさまざまな初等的方法が得られているが，Jones 自身によるもともとの定義では braid 群の表現を作用素環論を用いて構成することがキーになっていた．そこで，位相幾何学における爆発的発展とは別に，ここに現れた braid 群の表現を作用素環論的に理解することが重要な問題となったのである．これについては，場の量子論に作用素環論を用いてアプローチする分野である代数的場の量子論でそれまでに知られていた議論と，Jones の理論に現れる結果や議論の間に見られる類似性を追究することによって理解を深めようという考え方が発展して来ていた．この類似性の機構を数学的に明らかにする研究は，80 年代末に Fredenhagen-Rehren-Schröer[4], Frölich[5], Longo[10] らによってはっきりした基礎が確立され，その後現在まで活発な発展が続いている．本稿の目的はこの研究の一端をできるだけ初等的に解説することである．

まず基本的な仕組みの概略についての説明から始めよう．(これについての基本的な教科書は Haag のもの[6] である．) 代数的場の量子論では時空 (たとえば 4 次元 Minkowski 空間) の適当な領域に対し，そこで観測可能な物理的量のなす作用素環が対応すると考える．ここで作用素環とは，Hilbert 空間上の有界線形作用素のなす環で，しかるべき位相で閉じているものの事だが，大雑把には無限次元行列のなす集合で，行列の足し算や掛け算が自由にできるものという程度の理解でさしつかえない．その領域に作用素環を対応させる規則が，物理的に要請される公理を満たしている場合を考える．この公理とはたとえば，領域が広がるとそれに応じて対応する作用素環の方も大きくなるといった類の条件であり，詳しくは次のセクションで述べる．さてこのような対応規則が与えられたとき，適当な領域たちでパラメトライズされた作用素環の族があることになる．この領域たちは有向族をなすので，この作用素環の族を作用素環のネットと呼ぶ．次に考えることはそのような作用素環のネットの表現である．もともとこの作用素環の族はある Hilbert 空間の上の作用素たちとして実現されていると考えているのでそれ自体が表現をなしていると思えて，これを真空表現と言うが，それ以外の別の Hilbert 空間への表現も考えるのである．そのような表現たちを分類し，その構造を調べたいのだが，作用素環論的な理由によって，表現の代わりに作用素環のネットの適当な自己準同型を調べればよいことがわかる．そこでそのような自己準同型を二つとって λ, μ としよう．

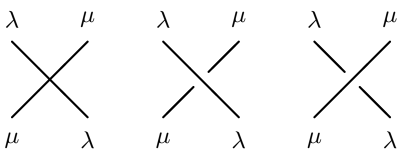

図 1　λ, μ の入れ替え

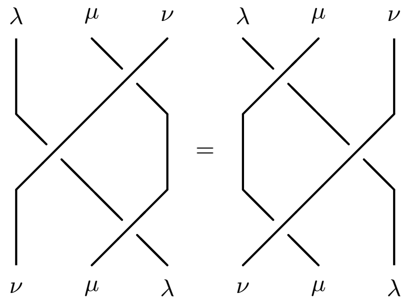

図 2　Braid の関係式

自己準同型は合成できるから，二つの合成 $\lambda\mu$ と $\mu\lambda$ が作れる．この二つは「ほとんど同じ」なのだが，まったく同じではない．この小さな違いを記述するものとしてユニタリ作用素が現れる．このユニタリ作用素は，「λ と μ の順番を入れ替える」という働きを持っていると考える．ほかにも「μ と ν の順番を入れ替える」という働きを持っているユニタリ作用素などがあり，全体として，$\lambda, \mu, \ldots$ たち (正確にはこれらの適当な同値類たち) の置換を引き起こす．ここで時空の次元が 3 以上であればこのユニタリ作用素たちの働きは単なる置換と思えることが昔からわかっていたが，時空の次元が低いときは「λ と μ を右回りに入れ替える」のと「λ と μ を左回りに入れ替える」のは違うと思わないといけなくなるのである．

これを模式的に表したものが図 1 である．時空の次元が高いときは一番左の図のように，単に λ, μ を入れ替えるという操作だけを考えればいいが，時空の次元が低くなってくると，真中の操作と一番右の操作を区別して考えなくてはいけなくなってくるのである．ここでこの二つの図は別のユニタリ作用素を表していると考える．さらにこの二つの図はそれぞれ二本の紐が絡まっている図だと思うことができ，紐の絡まりと思って自然な関係が，ユニタリ作用素の間の関係式として成り立っている．たとえば図 2 では，一方では紐の絡まりと思えば左右の絵は同じ絡まり方だと思えるが，他方では左右の絵はそれぞれ，三つのユニタリ作用素をしかるべき方法で合成したものを表しており，この等式はそれらのユニタリ作用素が等しいことを表しているとも解釈できる．(左右の絵のそれぞれの三つの交差点それぞれに一つのユニタリ作用素が対応する．本当は紐は上から下に向かって向きがついているが簡単のため省略した．以下の図でも同様である．) このような紐の絡み目を位相幾何学で braid と呼ぶので，これによって自然に低次元の代数的場の量子論から braid が現れる．このこと自体はかなり昔からわかっていたのだが，Jones 多項式の発見[9] を契機に braid が現れる仕組みをもっと直接的に理解しようという研究が始まったのである．次のセクションでこの仕組みをもう少し数学的に説明する．

2. 円周上の代数的場の量子論と braid

さて上で述べたことをもう少し詳しく説明しよう．低次元の時空の領域に対応して作用素環を対応させる仕組みを考えるのであったが，数学的なからくりをはっきりさせるには思い切って簡単化して，1 次元にしてしかも $\mathbf{R}$ ではなく，1 点コンパクト化を行った円周 S^1 を時空と思うのがわかりやすい．S^1 を「時空」と呼ぶのは無理があるかもしれないが，気にしないことにしよう．そこで平面上の単位円 S^1 を考え，さらにその 1 点を固定して 1 点コンパクト化の際に付け加えられた無限遠点 ∞ と思うことにする．時空の領域に対して作用素環を対応させると言ったが，ここで考える時空のしかるべき領域とは，S^1 の空でない連結開集合で閉包をとっても ∞ を含まないもののこととする．そのような集合を単に「区間」と呼ぶことにしよう．そして各区間 I に作用素環 $A(I)$ を対応させる規則が与えられていて，いくつかの公理を満たしているとするのである．以下，公理を全部書いてもあまり意味がないので書かないこと

にして，いくつかの重要な条件について説明を加える．まず，S^1 上の任意の部分集合 E について，$A(E)$ とは $I \subset E$ であるような区間たちについての $A(I)$ で生成する作用素環とする．

まず上にも書いたように，$I \subset J$ ならば $A(I) \subset A(J)$ という同調性という条件がある．

区間 I の補集合を S^1 で考えてその内部を取ったものを I' と書く．これは ∞ を含んでいるので上の意味での区間ではない．一方，作用素環 $A(I)$ に対し，その元すべてと交換する作用素全体のなす作用素環を $A(I)'$ と書く．すなわち，今考えている Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体を $B(H)$ と書いたとき，

$$A(I)' = \{x \in B(H) \mid \forall y \in A(I) \quad xy = yx\}$$

である．このとき，$A(I') = A(I)'$ という等式を Haag 双対性と言い，これが成り立っていることを仮定する．これ自体を公理とすることもあるし，これを導くようなほかの条件を公理とすることもあるが，今はどちらでも気にすることはない．もともとは時空 $¥bfR^4$ で考えたときに，光速で進んでも互いに到達できないような二つの領域については，相互作用を及ぼせないので，観測可能な物理量のなす作用素環の元同士は交換するという局所性の概念を強めたものから来ていて，それを S^1 上で考えたものである．

残りの公理についてはここでの説明にはあまり関係ないので省略する．

この状況で，区間 I たちによる添え字のついた $A(I)$ たちを作用素環のネットと呼ぶ．このネットの表現を考えたいのだが，上に述べたように，それにはネットのある種の自己準同型を考えればよい．その「ある種の自己準同型」を正確に説明しよう．これの性質が braid と結びつくのである．

まず $A(I)$ たちの生成する作用素環の自己準同型を考えて λ と書く．$J \subset I'$ のとき，$A(J)$ 上 λ が恒等写像になるとき，λ は I 上に局所化されているという．$A(I)$ たちが III 型 von Neumann 環と呼ばれる作用素環であるために，ネットの表現を考える代わりにある区間に局所化された自己準同型を考えればよいことが導かれるのである．また I 上に局所化された自己準同型 λ が,「別の任意の区間 J に対して，ユニタリ $U_{\lambda;I,J}$ を $A(K)$ たちから生成される作用素環の中からうまく選べば $\mathrm{Ad}(U_{\lambda;I,J})\cdot\lambda$ が J 上に局所化されているようにできる」という条件を満たすとき，transportable であるという．以下考える自己準同型は，ある区間に局所化されていてしかも transportable なものである．このようなものを考えた Doplicher-Haag-Roberts[2] の頭文字を並べて，このような自己準同型をしばしば DHR 自己準同型と言う．DHR 準同型 λ が I 上に局所化されているとき，$I \subset J$ であれば，$x \in A(J)$, $y \in A(J)' = A(J')$ に対し

$$\lambda(x)y = \lambda(xy) = \lambda(yx) = y\lambda(x)$$

だから $\lambda(x) \in A(J)''$ となるが，今考えている作用素環 (von Neumann 環と呼ばれるものである) は $A(J)'' = A(J)$ という性質を満たしているので，結局 λ は各 $A(J)$ の自己準同型を与えることになる．

さて，2 つの DHR 準同型 λ, μ が区間 I, J に局所化されていて I と J が交わらないとしよう．このときは transportable という性質を使って $\lambda\mu = \mu\lambda$ であることが示せる．一般に無限次元環の自己準同型の合成は交換する理由はまったくないから，これはかなり特別のことである．

次に今度は 2 つの DHR 準同型 λ, μ が同じ区間 I に局所化されているとしよう．今度は $\lambda\mu = \mu\lambda$ とは言えないが，次のような計算ができる．まず互いに交わらない区間 J, K を取る．Transporable という性質から，ユニタリ作用素 $U_{\lambda;I,J}, U_{\mu;I,K}$ があって，$\mathrm{Ad}(U_{\lambda;I,J})\cdot\lambda$ $\mathrm{Ad}(U_{\mu;I,K})\cdot\mu$ がそれぞれ区間 J, K に局所化されているようにできる．そこで，

$$\varepsilon^{J,K}(\lambda,\mu) = \mu(U^*_{\lambda;I,J})U^*_{\mu;I,K}U_{\lambda;I,J}\lambda(U_{\mu;I,K})$$

とおくと，このユニタリ作用素は $U_{\lambda;I,J}, U_{\mu;I,K}$ に依存しないことが Haag 双対性と局所化の性質からわかる．

さらに今度は区間 J, K を取り替えることを考え

る．たとえば J の方について言うと，J を K と交わらないまま「少し」だけずらして J と重なった区間 J_0 に変えても $\varepsilon^{J,K}(\lambda,\mu)$ は変化しないことがわかる．なぜなら区間を J で考えることと $J\cap J_0$ で考えることとの違いは，区間は $J\cap J_0$ に固定してユニタリ作用素を 2 通りに取ったことの違いとも考えられるので上の説明が適用できるからである．このように「少しずつ」ずらしていくことを繰り返せば J はどんどん動かしていくことができる．また K の方も同様にずらしていける．これでだいたい S^1 上でいくらでも区間 J,K は動かせるような気になるが，一つ問題がある．それは「区間」は無限遠点を含むことができないと言うことである．だから区間 J,K を交わらないように最初に決めたあと，少しずつずらすことを繰り返しても J,K の二つを入れ替えることはできない．つまり無限遠点を除いた S^1 上で，J から K に向かう向きが右回りか左回りかの二通りがあり，この両者はずらしの繰り返しでは移りあえないのである．そこで，$\varepsilon^{J,K}(\lambda,\mu)$ の選び方も J と K の位置関係によって二つの可能性があることになる．(この二つはたまたま同じになることもあるが，実際に違う例がたくさん知られている．) この二つを $\varepsilon^{\pm}(\lambda,\mu)$ と書くことにする．どちらがプラスでどちらがマイナスかは単に取り決めの問題である．そしてこの二つのユニタリ作用素を，図 1 の真中の絵，右の絵で表すことにする．図 2 では，左右それぞれの絵に交差点が三つずつあるが，それぞれがこのようなユニタリ作用素を表していると考え，この三つを上から順に合成する．これによって左右それぞれの絵の表すユニタリ作用素が等しいということを式で書くと，

$$\begin{aligned}&\nu(\varepsilon^-(\lambda,\mu))\varepsilon^-(\lambda,\nu)\lambda(\varepsilon^-(\mu,\nu))\\ =\ &\varepsilon^-(\mu,\nu)\mu(\varepsilon^-(\lambda,\nu))\varepsilon^-(\lambda,\mu)\end{aligned}$$

となる．この関係式はしばしば Yang-Baxter 関係式と呼ばれる．ε^- たちの前に，λ,μ,ν などがついているところが三ヶ所あって，それはしかるべき規則にしたがってつけているものだがここでは詳しい説明は省略する．ほかにもこれに類する図形的に表される等式がいくつも成り立っていることが示される．このことを $\epsilon^{\pm}(\cdot,\cdot)$ は braiding であるとか，DHR 自己準同型たちは braiding を持つとか，DHR 自己準同型たちは braided であると言う．

この議論を振り返ってみると，円周 S^1 から無限遠点を抜いたところでは，区間の補集合は二つの連結成分に分かれ，したがってもう一つの区間がそのどちらに入るかで ε の $\pm$ が生じたのであった．このことには我々の今考えている「時空」が 1 次元であることが本質的に影響している．時空の次元が高いときは，区間にあたる領域について単に補集合を考えるのではなくて，相対性理論の意味で空間的な補集合を考えるので少し事情が違うが，基本的には ε の $\pm$ にあたる違いはなくなって，置換操作だけが意味を持つことになるのである．素朴に考えると時空の次元が高い方が理論が複雑になるように思えるかもしれないが，ここでは次元が低い方が，複雑でおもしろい現象が生じるのである．

3. Subfactor 理論と braiding

さて上のセクションでは S^1 上の代数的場の理論から braiding がどのように生じるかを見た．これは重要な話題であるが，Jones の創始した subfactor 理論の立場からは特別すぎるとも言える．これについて一般論の基礎を築いたのが Longo[10] の仕事であり，セクター理論と呼ばれる．

まず上述の代数的場の量子論では，作用素環のネットの表現を考えた．物理的な由来により，上で考えたような表現，あるいは DHR 自己準同型を超選択則セクターという．これはもともと作用素環の表現を考えたものなので，コンパクト群のユニタリ表現とよく似た性質を持っていることが昔からわかっていた．たとえば，作用素環のネット $A(I)$ に対し，S^1 上の区間 I を固定して，DHR 自己準同型で I 上に局所化されたものたちを考える．すると，そのような自己準同型たちは $A(I)$ 上で合成することができるが，この自己準同型の合成

ととコンパクト群のユニタリ表現のテンソル積はきわめてよく似たふるまいをする．さらにコンパクト群 G のユニタリ表現に対しては，既約性，既約分解，次元，共役表現などの概念があるが，これらに対応した概念が自己準同型の方でも考えられるのである．

歴史的にはこれらは時空の次元が高いときに先に考えられていた．このときは超選択則セクターたちの代数的ふるまいは，あるコンパクト群のユニタリ表現たちとまったく同一であることがわかっている．超選択則セクターの次元というものが抽象的に定義できるのだが，この同一視によってそれはユニタリ表現の通常の次元に移る．超選択則セクターの次元は最初正の実数として定義されるのだが実は整数になることがわかるのである．そしてテンソル積などの操作も完全に対応していることがわかる．

さて Longo は，時空の次元を落としてもほぼ同様なことができるが，次元はもはや整数とは限らないことに気づいた．より正確に言うと，I 上に局所化された DHR 自己準同型 λ に対し，その超選択則セクターとしての次元を d_λ と書き，一方作用素環 $A(I)$ とその部分環 $\lambda(A(I))$ に対する Jones 指数 $[A(I):\lambda(A(I))]$ を考えると，$d_\lambda^2=[A(I):\lambda(A(I))]$ という関係式を Longo は示したのである．これより，d_λ は，$1\le d_\lambda<2$ の範囲では $2\cos(\pi/n)$, $n=3,4,5,\dots$ という値を取ることが Jones の理論よりわかる．

さらに Longo は，ネットから生じる作用素環 $A(I)$ ではなく，III 型 factor と呼ばれる一般の作用素環とその自己準同型についてもほぼ同様な一般論が展開できることを示したのである．つまり，ネットのことは忘れてまず任意に III 型 factor と呼ばれる作用素環 M を取る．(III 型 factor の定義は簡単な説明には関係しないので省略する．ここでの研究のために都合のよい性質を持った作用素環でよく調べられているものだと思っているだけでとりあえず差しつかえない．作用素環のネットから生じる $A(I)$ は III 型 factor である．) 次に M の自己準同型 λ を考えると，これに対して「次元」が Jones index $[M:\lambda(M)]$ の平方根として定義される．この次元は $[1,\infty]$ の間の値を取るが，以下有限次元のものだけを考える．(無限次元の場合については現在でも研究はあまり進んでいない．) するとこのような有限次元の自己準同型 λ,μ に対してその合成 $\lambda\mu$ が考えられ，これがやはりユニタリ表現のテンソル積と同様の性質を持つ．さらに有限次元の自己準同型たちについて，ユニタリ同値性，既約性，直和，既約分解，共役自己準同型などの概念が定義され，コンパクト群のユニタリ表現とほぼ同様な性質が成り立つ．たとえば，直和や合成の次元は次元の和や積になる，といったことである．ただし，次の二つの点がコンパクト群のユニタリ表現と違っている．第一はすでに述べたように「次元」が整数とは限らないことである．もう一つは合成の可換性の問題で，コンパクト群のユニタリ表現 π,σ を取った場合は $\pi\otimes\sigma$ と $\sigma\otimes\pi$ は自然にユニタリ同値である．これに対応するステートメントは，(有限次元) 自己準同型 λ,μ に対して $\lambda\mu$ と $\mu\lambda$ がユニタリ同値である，ということだかこれはもはや一般的設定では正しくない．さらに，作用素環のネットから生じる DHR 自己準同型の場合は，このステートメント自体は正しいが，ユニタリ同値を導くユニタリ作用素が $\epsilon^\pm$ であるので，そこにコンパクト群のユニタリ表現とは異なった興味深いことが起こっているのである．このような自己準同型のユニタリ同値類のことを，超選択則セクターの一般化という意味で，Longo[10] はセクターと名づけた．これがセクター理論である．

さて，ここまで一般的な状況にしてしまうと，上に述べたとおり $\lambda\mu$ と $\mu\lambda$ がユニタリ同値とは限らないので braiding の話はできなくなってしまう．そこで，考え方を変えて，DHR 自己準同型のときに成り立っていたような性質を抽象化してその性質が成り立っているとき，自己準同型たちの集合は braiding を持つと言うことにしよう．その上で，いつ braiding を持つか，とか，braiding を持てば何がわかるか，といったことを調べるのである．

そこで次のような設定を考える．III 型 factor と呼ばれる作用素環 M を固定し，その有限次元既約自己準同型からなる集合 Δ が次の条件を満たすとする．

1. Δ の元たちはどの二つも互いにユニタリ同値ではない．
2. 恒等写像は Δ に入っている．
3. 任意の $\lambda \in \Delta$ に対し，その共役自己準同型も Δ に入っている．
4. 任意の $\lambda, \mu \in \Delta$ に対し，その合成の既約分解は Δ の元たちでできる．

これはコンパクト群の既約表現の同値類から一つずつ代表元を選んだものと類似の概念であることがわかるであろう．現在の研究では Δ が有限集合である場合が詳しく調べられている．コンパクト群の既約表現の場合はこの有限性条件は，群が有限群であることに対応するので，状況は非常に簡単に見えるかもしれないが，多くの興味深い現象がこの有限性条件のもとで生じることがわかっている．Jones の subfactor 理論でよく行われている方法は，まず上のような作用素環 M とその部分環 N で M と同型なものから出発する．このとき，M から N への同型写像は明らかに M の自己準同型である．そこで，この自己準同型から出発してそれによって「生成」される有限次元既約自己準同型たちの代表元たちの集合として Δ をとらえるのである．このような研究は Longo 以前に Ocneanu によって別の少し別の動機，方法によっても行われていて，Ocneanu による理論と Longo による理論とはほぼ等価であるが，ここでは場の量子論に基づく動機が明らかになるようにセクター理論の方を使っている．(Ocneanu の方の流儀については，筆者の本[3) に詳しく書いておいた．)

さらにこの Δ が braiding を持つということを定義する．これは任意の $\lambda, \mu \in \Delta$ に対して，

$$\varepsilon(\lambda,\mu)\lambda(\mu(x)) = \mu(\lambda(x))\varepsilon(\lambda,\mu), \quad \forall x \in M,$$

を満たすようなユニタリ作用素 $\varepsilon(\lambda,\mu) \in M$ である種の関係式を満たすものが取れるということである．関係式はここで書いてもあまり意味がないので書かないが，たとえば上で述べた Yang-Baxter 方程式はこれらの関係式の帰結であり，またこれらの関係式は紐の絡まり具合の関係として図で表すことができる．たとえば一つの関係式は図 3 のように図で表すことができ，残りの関係式も同様である．この図で 3 重点は $\lambda\mu$ から ν への任意の intertwiner を表しているが詳しい説明は省略する．

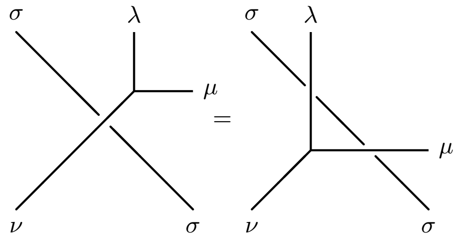

図 3　Braiding の関係式

作用素環的論的に braiding を調べるには，これらの条件さえあればよく，別に作用素環のネットはなくてもよい．そこでこれらの条件を braidin の公理として作用素環論の枠組みで研究することが，Rehren の研究以来この 10 年間くらいに盛んに行われている．

4. Braiding の果たす役割

さて上のセクションのように braiding というものを一般的にとらえたとしよう．ただちに生じる疑問として次のものがある．

1. どのような作用素環論的方法が braiding を生じるか．
2. Braiding があることが作用素環論的研究にとってどのような意味があるか．
3. Braiding は他の数学，数理物理学の分野にとってどのような意味があるか．
4. 他の数学，数理物理学の分野での braiding の扱いに比べて作用素環論を用いることの利点は何か．

これらの疑問に答えることがこの小文の最後の役

割である．

まず，作用素環のネットが第一の疑問の一つの答えであることは最初から明らかである．それ以外には，quantum double にあたる構成がある．Drinfel′d の quantum double とは Hopf algebra の意味での braiding を作る方法である．Subfactor 理論の設定では，しかるべき作用素環 M(たとえば上のように III 型 factor) とその部分環 N から出発するが，ここから上のように Δ を作ってもそこには一般には braiding はない．しかし，$N \subset M$ から出発して別の作用素環 R とその部分環 P をいったん構成して $P \subset R$ に対して対応する Δ を作ればそこでは braiding を作ることができるのである．この種の構成法はいろいろ知られているが，最初のものは Ocneanu による asymptotic inclusion[3] である．これは braiding がないところから出発しても braiding を作り出せると言う意味で quantum double 構成法の類似であり，またカテゴリー理論での quantum double 構成とも本質的に同じものであることがわかっている．

Braiding があると，それをもとに新しい subfactor を構成することができる．この種の具体的構成は，Ocneanu, Xu[11] による．彼らの方法は braiding を用いると言うこと以外はまったく違うように見えていたが本質的に同じものであることが，Böckenhauer, Evans, および筆者によって示された．これは，数理物理学における modular invariant の分類理論とも密接に関係して大きく発展している．

次に braiding を研究することの意義である．Braiding の研究は広大な範囲にわたっており，すぐに思いつくだけでも，量子群の理論，共形場理論，Hopf algebra の代数的理論，量子的位相不変量の理論などがあがる．これらすべてについて論じることは筆者の能力の範囲を超えているが，braiding は代数的構造の新しい例として，多くの研究者を引き付け現代数学を発展させる力の一つになっているのである．これらの数多い分野のうち一つだけをあげるなら，3 次元多様体の量子不変量の話題であろう．もともと，link の不変量 Jones 多項式が braiding との関連で見出されたことは上に述べたが，そこから発展した，3 次元多様体の位相不変量の理論では braiding が非常に大きな役割を果たしているのである．

最後に作用素環論を用いる方法の意義について説明したい．Braiding を用いた研究が作用素環論内部の研究テーマに有用であることはよいとして，braiding はすぐ上にも述べたように非常に多くの分野でその分野独自の動機や方法によって研究されているのである．そこで，それらの多くの方法の中で，作用素環を用いる利点が何かあるのだろうか，ということである．もちろん私は，作用素環論の研究者の一人として，あると答えようとしているのである．私の考えでは有用性は 2 つあると思っており，一つは統一的，理論的な記述の道具としての有用性であり，もう一つは具体的な例の構成，計算のための有用性である．

Braiding を一般的に研究しようとすれば，一番抽象的にはある種のカテゴリー理論になるのであって，純粋に代数的，あるいは組み合わせ論的に扱うことができる．そのような立場からすれば，Hilbert 空間とか無限次元環だとかは別に不要なものであろう．作用素環論なしでそういう研究が可能であり，実際にたくさん行われていることは明らかである．このような一般的研究についての作用素環的方法の利点は無限次元性から来る，受け入れの幅の広さである．何でも飲み込めるだけの大きさがあると言ってもよい．この性質のため，さまざまな条件，構成が簡明な統一的方法によって記述できるのである．つまり作用素環を使わなくてはいけないわけではないが，使うことによって見通しがよくなるということである．

次に具体的な構成，計算について言うと，他の分野，つまり量子群や共形場理論で盛んに研究されているのは，有限群に関連した古典的構成を除けば，Lie 群/環の deformation である．ほとんどそれだけが研究対象になっているような場合も非常に多い．しかし作用素環論を用いた研究によってそうではないような興味深い代数系や braiding の例も知られているのである．現在までに構成されたもっ

とも奇妙な subfactor の例は，Haagerup，浅枝-Haagerup によるもの[1] である．これらは braiding を持っていないが，上述の quantum double 構成法によって，braiding を作ることができる．前者のほうについては泉[7] による具体的な計算が作用素環論的に行われている．これらの例の意義や応用についての研究，特に位相不変量との関係の研究はこれからの課題であろう．

参考文献

1) M. Asaeda and U. Haagerup, Exotic subfactors of finite depth with Jones indices $(5+\sqrt{13})/2$ and $(5+\sqrt{17})/2$, *Commun. Math. Phys.* **202** (1999), 1–63.
2) S. Doplicher, R. Haag, and J. E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I, *Commun. Math. Phys.* **13** (1969), 1–23.
3) D. E. Evans and Y. Kawahigashi, “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998.
4) K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, and B. Schroer, Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras, *Commun. Math. Phys.* **125** (1989), 201–226.
5) J. Fröhlich, The statistics of fields, the Yang-Baxter equation, and the theory of knots and links, in “Non-Perturbative Quantum Field Theory”, G. ’t Hooft et al. (ed.), Plenum, (1988).
6) R. Haag, “Local Quantum Physics” (second edition), Springer Verlag, 1996.
7) M. Izumi, The structure of sectors associated with Longo-Rehren inclusions II. Examples, preprint 2000.
8) V. F. R. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72** (1983), 1–25.
9) V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 103–112.
10) R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, I. *Commun. Math. Phys.* **126** (1989), 217–247.
11) F. Xu, (1998). New braided endomorphisms from conformal inclusions. *Commun. Math. Phys.* **192** (1998), 349–403.

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）