

対称性と群の表現論に基づく 超伝導ギャップ・ノード構造の分類理論

角田 峻太郎

2022年2月25日(3日目)

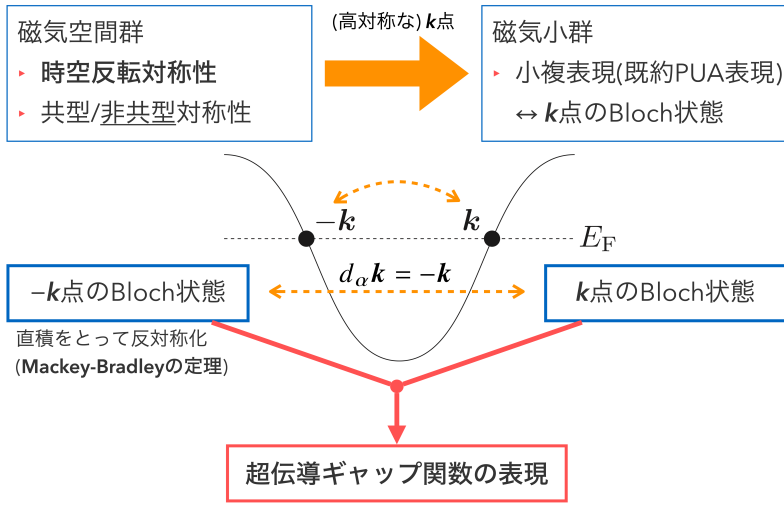
理化学研究所 古崎物性理論研究室

前回の復習

- 磁気小点群 \bar{M}^k の既約 PUA 表現 $\bar{\mu}^k$ (Bloch 状態の情報) から,
Mackey-Bradley の定理によって超伝導ギャップ関数の表現 $\bar{v}_\alpha^{k,-}$ を構成できる.
- 鏡映面上の超伝導ギャップ関数の分類 (**非共型対称性**に起因する非自明な構造)
 - 具体例: UPt₃, UPd₂Al₃, UCoGe, Sr₂IrO₄ など
 - 分類結果にはギャップを開けられる独立な基底の個数が反映されている(?)
 ($k_z = 0$ で $A_g : 1, A_u : k_{x,y}\hat{x}, k_{x,y}\hat{y}, B_u : k_{x,y}\hat{z}$ など)

ケース	時間反転	重要な要素	$\bar{v}_I^{k_z=0;-}$	$\bar{v}_I^{k_z=\pi/c;-}$
(A)	なし	$[t_{M_z}]_z = 0$	A_u	A_u
(B)	なし	$[t_{M_z}]_z \neq 0$	A_u	B_u
(C)	あり	$[t_{M_z}]_z = [t_{\mathcal{T}}]_z = 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$
(D)	あり	$[t_{M_z}]_z = 0, [t_{\mathcal{T}}]_z \neq 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$B_g \oplus 3A_u$
(E)	あり	$[t_{M_z}]_z \neq 0, [t_{\mathcal{T}}]_z = 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$A_g \oplus 3B_u$
(F)	あり	$[t_{M_z}]_z \neq 0, [t_{\mathcal{T}}]_z \neq 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$B_g \oplus A_u \oplus 2B_u$

概念図



高対称点における超伝導ギャップ・ノードの分類結果の例 (つづき)

回転軸上の分類：角運動量による非自明ギャップ構造

空間反転対称性が破れた場合

トポロジカルな分類理論との対応

高対称点における超伝導ギャップ・ ノードの分類結果の例(つづき)

回転軸上の超伝導ギャップ・ノード構造の分類

- 時間・空間反転対称性および回転対称性をもつ共型な超伝導体
 - 回転軸：鏡映面より高対称 → スピン 1/2 以外に 3/2, 5/2 に対応する既約表現 $\bar{\mu}^k$
 - 回転軸を含む鏡映面が存在する場合もある (C_{nv})

\bar{M}^k	$\bar{\mu}^k$	elements					
$C_2 \sqcup \mathfrak{I}C_2$		E	C_2				
	$E_{1/2}$	2	0				
$C_3 \sqcup \mathfrak{I}C_3$		E	C_3	C_3^2			
	$E_{1/2}$	2	1	-1			
	$2B_{3/2}$	2	-2	2			
$C_4 \sqcup \mathfrak{I}C_4$		E	C_4	C_4^3	C_4^2		
	$E_{1/2}$	2	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0		
	$E_{3/2}$	2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0		
$C_6 \sqcup \mathfrak{I}C_6$		E	C_6	C_6^5	C_3	C_3^2	C_2
	$E_{1/2}$	2	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	1	-1	0
	$E_{3/2}$	2	0	0	-2	2	0
	$E_{5/2}$	2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	-1	0

回転軸上の超伝導ギャップ・ノード構造の分類

- 時間・空間反転対称性および回転対称性をもつ共型な超伝導体
 - $C_{2(v)}, C_{4(v)}$: 一意な超伝導ギャップ関数の表現
 - $C_{3(v)}, C_{6(v)}$: **正常 Bloch 状態の角運動量**に依存する非自明な超伝導ギャップ構造

\bar{M}^k	$\bar{\mu}^k$	$\bar{v}_I^{k,-}$
$C_2 \sqcup \mathfrak{I}C_2$	$E_{1/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus 2B_u$
$C_3 \sqcup \mathfrak{I}C_3$	$E_{1/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus E_u$
	$2B_{3/2}$	$A_g \oplus 3A_u$
$C_4 \sqcup \mathfrak{I}C_4$	$E_{1/2}, E_{3/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus E_u$
$C_6 \sqcup \mathfrak{I}C_6$	$E_{1/2}, E_{5/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus E_{1u}$
	$E_{3/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus 2B_u$
$C_{2v} \sqcup \mathfrak{I}C_{2v}$	$E_{1/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus B_{2u} \oplus B_{3u}$
$C_{3v} \sqcup \mathfrak{I}C_{3v}$	$E_{1/2}$	$A_{1g} \oplus A_{1u} \oplus E_u$
	$E_{3/2}$	$A_{1g} \oplus 2A_{1u} \oplus A_{2u}$
$C_{4v} \sqcup \mathfrak{I}C_{4v}$	$E_{1/2}, E_{3/2}$	$A_{1g} \oplus A_{1u} \oplus E_u$
$C_{6v} \sqcup \mathfrak{I}C_{6v}$	$E_{1/2}, E_{5/2}$	$A_{1g} \oplus A_{1u} \oplus E_{1u}$
	$E_{3/2}$	$A_{1g} \oplus A_{1u} \oplus B_{1u} \oplus B_{2u}$

参考：多軌道超伝導体における秩序変数の分類

● 点群に基づく秩序変数の分類

T. Nomoto et al., PRB (2016)

- Sigrist-Ueda (1991) 等では
考慮されていなかった**高スピン状態**
- 純粋な電子スピンは $1/2$ だが、
多軌道系では**スピン軌道相互作用**により
全角運動量が $3/2$, $5/2$ 等になる場合がある

● 右表：点群 D_6 に対する分類

- $\Gamma_7 = E_{1/2}$, $\Gamma_8 = E_{5/2}$
- $\Gamma_9 = E_{3/2}$
- $1/2$, $5/2$ と $3/2$ では**分類結果が異なる**

TABLE VI. Basis functions of IRs in D_6 group. Expressions for $\Gamma_{7(8)}$ correspond to upper (lower) signs.

IR	$\Gamma_7 \otimes \Gamma_7$ (upper)/ $\Gamma_8 \otimes \Gamma_8$ (lower)	
A_1	$\phi^{A_1} \mathbf{0}$	$\phi^{A_2} z, \phi_1^{E_1} x \pm \phi_2^{E_1} y$
A_2	$\phi^{A_2} \mathbf{0}$	$\phi^{A_1} z, \phi_1^{E_1} x \mp \phi_2^{E_1} y$
B_1	$\phi^{B_1} \mathbf{0}$	$\phi^{B_2} z, \phi_1^{E_2} x \pm \phi_2^{E_2} y$
B_2	$\phi^{B_2} \mathbf{0}$	$\phi^{B_1} z, \phi_1^{E_2} x \mp \phi_2^{E_2} y$
E_1	$(\phi_1^{E_1}, \phi_2^{E_1}) \mathbf{0}$	$\phi^{A_1}(x, \pm y), \phi^{A_2}(y, \mp x),$ $(\phi_2^{E_2} x \pm \phi_1^{E_2} y, \phi_1^{E_2} x \mp \phi_2^{E_2} y),$ $(\phi_2^{E_1}, -\phi_1^{E_1})z$
E_2	$(\phi_1^{E_2}, \phi_2^{E_2}) \mathbf{0}$	$\phi^{B_1}(x, \pm y), \phi^{B_2}(y, \mp x),$ $(\phi_2^{E_1} x \pm \phi_1^{E_1} y, \phi_1^{E_1} x \mp \phi_2^{E_1} y),$ $(\phi_2^{E_2}, -\phi_1^{E_2})z$

IR	$\Gamma_9 \otimes \Gamma_9$	
A_1	$\phi^{A_1} \mathbf{0}$	$\phi^{A_2} z, \phi^{B_1} y, \phi^{B_2} x$
A_2	$\phi^{A_2} \mathbf{0}$	$\phi^{A_1} z, \phi^{B_2} y, \phi^{B_1} x$
B_1	$\phi^{B_1} \mathbf{0}$	$\phi^{B_2} z, \phi^{A_1} y, \phi^{A_2} x$
B_2	$\phi^{B_2} \mathbf{0}$	$\phi^{B_1} z, \phi^{A_2} y, \phi^{A_1} x$
E_1	$(\phi_1^{E_1}, \phi_2^{E_1}) \mathbf{0}$	$(\phi_1^{E_2}, \phi_2^{E_2}) y, (\phi_2^{E_1}, -\phi_1^{E_2}) x,$ $(\phi_2^{E_1}, -\phi_1^{E_1}) z$
E_2	$(\phi_1^{E_2}, \phi_2^{E_2}) \mathbf{0}$	$(\phi_1^{E_1}, \phi_2^{E_1}) y, (\phi_2^{E_2}, -\phi_1^{E_1}) x,$ $(\phi_2^{E_2}, -\phi_1^{E_2}) z$

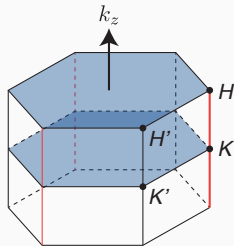
具体例：磁気空間群 $P6_3/mmc1'$ (#194.264)

- 候補物質：重い電子系超伝導体 UPt_3
- 3 回回転操作 $C_{3z} = \{C_{3z}|0\}$ をもつ
- 正常 Bloch 状態の角運動量 $1/2, 3/2$ に対する
回転軸 $K-H$ 上の超伝導ギャップ構造の分類：

$$\bar{v}_{1/2}^{K-H,-} \uparrow D_{6h} \simeq A_{1g} \oplus B_{2g} \oplus A_{1u} \oplus B_{2u} \oplus E_{1u} \oplus E_{2u}$$

$$\bar{v}_{3/2}^{K-H,-} \uparrow D_{6h} \simeq A_{1g} \oplus B_{2g} \oplus 2A_{1u} \oplus A_{2u} \oplus B_{1u} \oplus 2B_{2u}$$

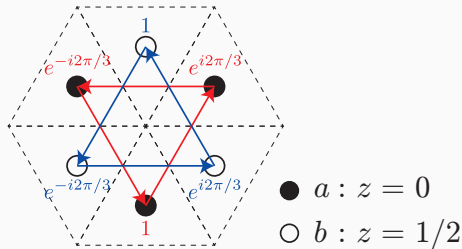
- UPt_3 では E_{2u} 表現に属する超伝導秩序変数が有力と考えられている
→ $K-H$ 軸上では**正常状態の角運動量が $1/2$ の場合はギャップが開き、
 $3/2$ の場合は点ノードが現れる。**



具体例：磁気空間群 $P6_3/mmc1'$ (#194.264)

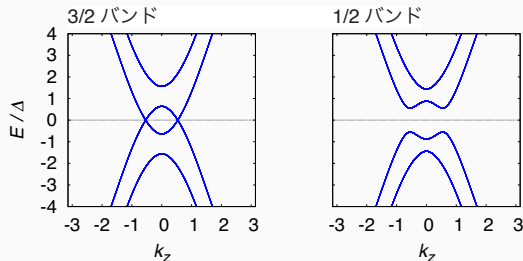
- UPt_3 の有効模型の構築 Y. Yanase (2016) / SS & Y. Yanase (2018)
 - 1 軌道模型だが，原子が反転中心にないことにより有効的な角運動量を獲得する
 - K - H 軸上の Bloch 状態の**全角運動量** ($1/2, 3/2$) を**パラメータによって制御可能**

	K - H line				K' - H' line			
	l_z	s_z	λ_z	j_z	l_z	s_z	λ_z	j_z
$ a, \uparrow\rangle$	0	+1/2	+1	+3/2	0	+1/2	-1	-1/2
$ a, \downarrow\rangle$	0	-1/2	+1	+1/2	0	-1/2	-1	-3/2
$ b, \uparrow\rangle$	0	+1/2	-1	-1/2	0	+1/2	+1	+3/2
$ b, \downarrow\rangle$	0	-1/2	-1	-3/2	0	-1/2	+1	+1/2



具体例：磁気空間群 $P6_3/mmc1'$ (#194.264)

- UPt_3 の有効模型の構築 Y. Yanase (2016) / SS & Y. Yanase (2018)
 - 1 軌道模型だが，原子が反転中心にないことにより有効的な角運動量を獲得する
 - K - H 軸上の Bloch 状態の全角運動量 ($1/2, 3/2$) をパラメータによって制御可能
- E_{2u} 表現に属する超伝導秩序変数を仮定した K - H 軸上の数値計算結果
→ 表現論に基づく超伝導ギャップ・ノードの分類と全く整合的な結果！



具体例：磁気空間群 $Fm\bar{3}c1'$ (#226.123)

- 候補物質： UBe_{13}
- Γ - L 軸上の超伝導ギャップ・ノード構造の分類

SS & Y. Yanase (2018)

$$\bar{v}_{1/2}^{\Gamma-L,-} \uparrow O_h \simeq A_{1g} \oplus T_{2g} \oplus A_{1u} \oplus E_u \oplus T_{1u} \oplus 2T_{2u}$$

$$\bar{v}_{3/2}^{\Gamma-L,-} \uparrow O_h \simeq A_{1g} \oplus T_{2g} \oplus 2A_{1u} \oplus A_{2u} \oplus T_{1u} \oplus 2T_{2u}$$

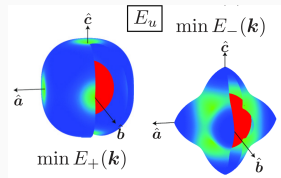
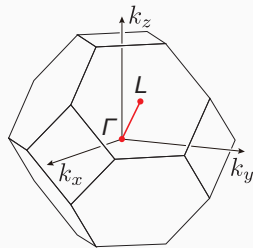
- 有力とされる秩序変数

- E_u ：角運動量 j_z に依存する超伝導ギャップ構造

Y. Shimizu et al. (2017); K. Machida (2018)

- $A_{1u} \oplus A_{2u} / A_{1u} \oplus E_u$ ：ギャップが開く

Y. Shimizu et al. (2017); Y. Shimizu et al. (2019)



T. Mizushima & M. Nitta (2018)

空間反転対称性が破れた場合

- 元々の Mackey-Bradley の定理はユニタリ表現の範囲内で考えられていた
- 今回、この定理 (の中で得られる指標公式) を**反ユニタリ操作の範囲まで拡張**
→ 空間反転対称性が破れた超伝導体でも、時間反転対称性さえ残っていれば
 $d_\alpha = \mathcal{T}$ とすることによって超伝導ギャップ関数の表現を求められる

$$\text{tr}[\bar{v}_\alpha^{k,-}(\bar{m})] = \frac{\omega^k(m, \mathcal{T})}{\omega^k(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}m\mathcal{T})} \text{tr}[\bar{\mu}^k(\overline{\mathcal{T}^{-1}m\mathcal{T}})]^* \text{tr}[\bar{\mu}^k(\bar{m})]$$

$$\text{tr}[\bar{v}_\alpha^{k,-}(\overline{\mathcal{T}m})] = -\omega^k(\mathcal{T}m, \mathcal{T}m) \text{tr}[\bar{\mu}^k(\overline{\mathcal{T}m\mathcal{T}m})], \quad \phi(\mathcal{T}m) = 1$$

- 時空反転対称性をどちらも破る超伝導体については、
表現論的に超伝導ギャップ・ノードを分類する公式はない？
 - 私見：この場合は基本的に超伝導ギャップが開かない
 - バンド内秩序変数も有限エネルギーに効く → Bogoliubov フェルミ面ができる

トポロジカルな分類理論との対応

超伝導ギャップ・ノード構造のトポロジカルな分類理論

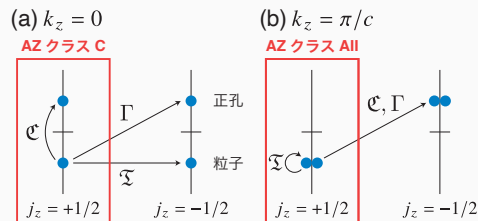
- 表現論的な超伝導ギャップ・ノードの分類 (本講義)
- **トポロジカルな超伝導ギャップ・ノードの分類**
 - 注目する波数 k (例えば鏡映面) における小群の小表現を考える
 - その表現が時間反転・粒子正孔・カイラル的な対称性に対して閉じているかを見る
 - バンドがもつトポロジカルな性質を **Altland-Zirnbauer クラスの分類** に帰着させる

- 例: $P6_3/mmc1'$, 鏡映面

$$\bar{v}_I^{k_z=0;-} \simeq A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$$

$$\bar{v}_I^{k_z=\pi/c;-} \simeq A_g \oplus 3B_u$$

- A_u 表現に対するトポロジカルな分類
 - $k_z = 0 : 0$ (自明), $k_z = \pi/c : 2\mathbb{Z}$



- 表現論的な超伝導ギャップ・ノードの分類 (本講義)
- トポロジカルな超伝導ギャップ・ノードの分類
 - 注目する波数 k (例えば鏡映面) における小群の小表現を考える
 - その表現が時間反転・粒子正孔・カイラル的な対称性に対して閉じているかを見る
 - バンドがもつトポロジカルな性質を **Altland-Zirnbauer クラスの分類**に帰着させる
- 2つの手法の間の **“対応関係”** を見たい。
 - 厳密な証明などはないが、様々な結果の比較から予想されることを述べる
 - 鏡映面・回転軸といった高対称点上の分類結果を見る
 - 参考：ノードが高対称点からどう広がるかは**適合関係** (第 1 微分) によって分かる (詳細は S. Ono & K. Shiozaki, PRX **12**, 011021 (2022))

鏡映面上の分類結果の比較 (時間・空間反転あり)

表現論的な分類結果

ケース	重要な要素	$\bar{v}_I^{k_z=0;-}$	$\bar{v}_I^{k_z=\pi/c;-}$
(C)	$[t_{M_z}]_z = [t_{\mathcal{T}}]_z = 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$
(D)	$[t_{M_z}]_z = 0, [t_{\mathcal{T}}]_z \neq 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$B_g \oplus 3A_u$
(E)	$[t_{M_z}]_z \neq 0, [t_{\mathcal{T}}]_z = 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$A_g \oplus 3B_u$
(F)	$[t_{M_z}]_z \neq 0, [t_{\mathcal{T}}]_z \neq 0$	$A_g \oplus 2A_u \oplus B_u$	$B_g \oplus A_u \oplus 2B_u$

既約表現 Γ が
表現論的な分類に現れない



Γ のトポロジカルな
分類が非自明になる

トポロジカルな分類結果 (0次元トポロジカル数) S. Kobayashi, SS et al. (2018)

ケース	A_g		B_g		A_u		B_u	
	$k_z = 0$	$k_z = \pi/c$	$k_z = 0$	$k_z = \pi/c$	$k_z = 0$	$k_z = \pi/c$	$k_z = 0$	$k_z = \pi/c$
(C)	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	0	0	0
(D)	0	$2\mathbb{Z}$	\mathbb{Z}_2	0	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
(E)	0	0	\mathbb{Z}_2	$2\mathbb{Z}$	0	$2\mathbb{Z}$	0	0
(F)	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	0	0	0	0

3 回回転軸上の分類結果の比較

表現論的な分類結果

\bar{M}^k	$\bar{\mu}^k$	$\bar{\nu}_I^{k,-}$
$C_3 \sqcup \mathfrak{Z}C_3$	$E_{1/2}$	$A_g \oplus A_u \oplus E_u$
	$2B_{3/2}$	$A_g \oplus 3A_u$

トポロジカルな分類結果 (0 次元トポロジカル数)

$\bar{\mathcal{G}}^k \simeq C_3$	A_g	1E_g	2E_g	A_u	1E_u	2E_u
$\bar{\gamma}_{+1/2}^k$	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0
$\bar{\gamma}_{+3/2}^k$	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}

- 1次元表現に関しては1対1に対応する.
- 2次元表現 E_g, E_u は時間反転で縮退した表現.

$$E_g \simeq {}^1E_g \oplus {}^2E_g, \quad E_u \simeq {}^1E_u \oplus {}^2E_u$$

S_6	E	C_3	I
1E_g	1	$e^{-i2\pi/3}$	+1
2E_g	1	$e^{+i2\pi/3}$	+1
1E_u	1	$e^{-i2\pi/3}$	-1
2E_u	1	$e^{+i2\pi/3}$	-1

- 2次元以上の表現は**自発的対称性の破れ**を伴うので, 分類に齟齬が生じる.
 - 表現論的な分類: **正常状態の対称性**を参照 ($\bar{\nu}_I^{k,-}$ は元の対称性を引き継ぐ)
 - トポロジカルな分類: **秩序状態の対称性**を参照

2 手法の相違点と処方箋

[表現論的な分類]

- 自発的対称性の破れを非考慮
→ 対称性を「忘れ」ればよい?
- 秩序変数の可能な成分の個数が入る
- \mathbb{Z} と \mathbb{Z}_2 の区別がない
→ $\bar{\mu}^k$ を $2\bar{\mu}^k$ として分類?
- $E_{1/2} \oplus E_{3/2}$ などに対する
計算ができる
- ノードの「発見」をしやすい

[トポロジカルな分類]

- 自発的対称性の破れを考慮
- 成分の個数は入らない(?)
- \mathbb{Z} と \mathbb{Z}_2 の区別がある
- $E_{1/2} \oplus E_{3/2}$ などに対する
計算はできない(?)
- ノードの「安定性」を見やすい

\mathbb{Z}_2 トポロジカル数について (例: C_{4v} 対称性をもつ回転軸)

- 通常の実験論の分類では \mathbb{Z} と \mathbb{Z}_2 の違いは見えない
- 正常状態のエネルギーバンドが偶然縮退するケースを考えれば \mathbb{Z}_2 が分かる?

S. Kobayashi, private communication

- 正常 Bloch 状態の PUA 表現 $\bar{\mu}^k \simeq E_{1/2}$ を $E_{1/2} \oplus E_{1/2}$ に変えて再計算

$\bar{\mu}^k \rightarrow 2\bar{\mu}^k$ とすることで
 \mathbb{Z}_2 に対応する表現が分かる。
 (\mathbb{Z} は 2 倍しても出てこない)

表現論的な分類結果

\bar{M}^k	$\bar{\mu}^k$	$\bar{\nu}_I^{k,-}$
$C_{4v} \sqcup \mathfrak{Z}C_{4v}$	$E_{1/2}$	$A_{1g} \oplus A_{1u} \oplus E_u$
	$2E_{1/2}$	$3A_{1g} \oplus A_{2g} \oplus E_g \oplus 3A_{1u} \oplus A_{2u} \oplus 3E_u$

トポロジカルな分類結果

C_{4v}	A_{1g}	A_{2g}	B_{1g}	B_{2g}	A_{1u}	A_{2u}	B_{1u}	B_{2u}
$\bar{\gamma}_{+1/2}^k$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}

スピン 1/2, 3/2 間の Cooper 対

- \mathbb{Z}_2 に対する処方箋を応用すれば,
 $E_{1/2} \oplus E_{3/2}$ などに対する分類もできる (多分).
- 実際, 秩序変数の文脈では
 このような分類が既になされている.
 T. Nomoto et al., PRB (2016)
- 例えば, 立方晶の Half-Heusler 超伝導体
 YPtBi · LuPtBi などでは, Γ 点付近で
 1/2 と 3/2 のバンドがほぼ縮退している.
 - $j = 3/2$ フェルミオンの超伝導
 P. M. R. Brydon et al., PRL (2016)
 - 非自明なギャップ構造が出るかも?

IR	$\Gamma_7 \otimes \Gamma_8$	
A_1	$\phi^{B_1} \mathbf{y}, \phi^{B_2} \mathbf{x}$	$\phi_1^{E_2} \mathbf{z} - i \phi_2^{E_2} \mathbf{0}$
A_2	$\phi^{B_2} \mathbf{y}, \phi^{B_1} \mathbf{x}$	$\phi_2^{E_2} \mathbf{z} + i \phi_1^{E_2} \mathbf{0}$
B_1	$\phi^{A_1} \mathbf{y}, \phi^{A_2} \mathbf{x}$	$\phi_1^{E_1} \mathbf{z} - i \phi_2^{E_1} \mathbf{0}$
B_2	$\phi^{A_2} \mathbf{y}, \phi^{A_1} \mathbf{x}$	$\phi_2^{E_1} \mathbf{z} + i \phi_1^{E_1} \mathbf{0}$
E_1	$(\phi_1^{E_2}, \phi_2^{E_2}) \mathbf{y},$ $(\phi_2^{E_2}, -\phi_1^{E_2}) \mathbf{x}$	$\phi^{B_1}(\mathbf{z}, -i\mathbf{0}), \phi^{B_2}(i\mathbf{0}, \mathbf{z}),$ $(\phi_2^{E_1} \mathbf{z} - i \phi_1^{E_1} \mathbf{0}, \phi_1^{E_1} \mathbf{z} + i \phi_2^{E_1} \mathbf{0})$
E_2	$(\phi_1^{E_1}, \phi_2^{E_1}) \mathbf{y},$ $(\phi_2^{E_1}, -\phi_1^{E_1}) \mathbf{x}$	$\phi^{A_1}(\mathbf{z}, -i\mathbf{0}), \phi^{A_2}(i\mathbf{0}, \mathbf{z}),$ $(\phi_2^{E_2} \mathbf{z} - i \phi_1^{E_2} \mathbf{0}, \phi_1^{E_2} \mathbf{z} + i \phi_2^{E_2} \mathbf{0})$

IR	$\Gamma_7 \otimes \Gamma_9$ (upper)/ $\Gamma_8 \otimes \Gamma_9$ (lower)	
A_1	$\phi_1^{E_1} \mathbf{x} \mp \phi_2^{E_1} \mathbf{y}$	$\phi_1^{E_2} \mathbf{z} \pm i \phi_2^{E_2} \mathbf{0}$
A_2	$\phi_2^{E_1} \mathbf{x} \pm \phi_1^{E_1} \mathbf{y}$	$\phi_2^{E_2} \mathbf{z} \mp i \phi_1^{E_2} \mathbf{0}$
B_1	$\phi_1^{E_2} \mathbf{x} \mp \phi_2^{E_2} \mathbf{y}$	$\phi_1^{E_1} \mathbf{z} \pm i \phi_2^{E_1} \mathbf{0}$
B_2	$\phi_2^{E_2} \mathbf{x} \pm \phi_1^{E_2} \mathbf{y}$	$\phi_2^{E_1} \mathbf{z} \mp i \phi_1^{E_1} \mathbf{0}$
E_1	$\phi^{A_1}(\mathbf{x}, \mp \mathbf{y}),$ $\phi^{A_2}(\mathbf{y}, \pm \mathbf{x}),$ $(\phi_2^{E_2} \mathbf{x} \mp \phi_1^{E_2} \mathbf{y}, \phi_1^{E_2} \mathbf{x} \pm \phi_2^{E_2} \mathbf{y})$	$\phi^{B_1}(\mathbf{z}, \pm i\mathbf{0}), \phi^{B_2}(i\mathbf{0}, \mp \mathbf{z}),$ $(\phi_2^{E_1} \mathbf{z} \pm i \phi_1^{E_1} \mathbf{0}, \phi_1^{E_1} \mathbf{z} \mp i \phi_2^{E_1} \mathbf{0})$
E_2	$\phi^{B_1}(\mathbf{x}, \mp \mathbf{y}),$ $\phi^{B_2}(\mathbf{y}, \pm \mathbf{x}),$ $(\phi_2^{E_1} \mathbf{x} \mp \phi_1^{E_1} \mathbf{y}, \phi_1^{E_1} \mathbf{x} \pm \phi_2^{E_1} \mathbf{y})$	$\phi^{A_1}(\mathbf{z}, \pm i\mathbf{0}), \phi^{A_2}(i\mathbf{0}, \mp \mathbf{z}),$ $(\phi_2^{E_2} \mathbf{z} \pm i \phi_1^{E_2} \mathbf{0}, \phi_1^{E_2} \mathbf{z} \mp i \phi_2^{E_2} \mathbf{0})$

予想

表現論的な分類理論とトポロジカルな分類理論には、自発的な対称性の破れがある場合を除いて次のような“対応関係”がある。

1. トポロジカルな分類において非自明な $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ の 0 次元トポロジカル数が得られるのは、表現論的な分類においてノードが予言されるときであり、かつそのときに限る。
2. トポロジカルな分類において \mathbb{Z}_2 の 0 次元トポロジカル数が得られるならば、表現論的な分類を同一の正常 Bloch 状態の直和に対して行ったときにギャップドであるという結果が得られる。

インプットの情報が (ほぼ) 同じなので対応があるのは当然な気もするが、よく分からない…

- 磁気空間群の表現論によって、Bloch 状態の情報を (ある程度) 得ることが可能.
- 正常 Bloch 状態の表現に **Mackey-Bradley の定理** を適用することで、**超伝導ギャップ関数が従う表現** を計算することができる.
 - 非共型対称性に起因する乗数系や、高角運動量の状態が非自明な超伝導ギャップ・ノードの構造を導く.
 - 秩序変数の点群的分類では捉えられなかった構造を予言することに成功.
 - 適切な条件と対称性さえ揃えばいいので、**物質の細かな性質に依らない**.
- 表現論的な分類とトポロジカルな分類には良い **"対応関係"** があるように見える.
 - ここをもう少し原理的に詰められると面白いかもしれない？