解析学 XD・スペクトル理論レポート問題

2021 年 12 月 22 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

以下の問題を解いて，1 月 21 日までにレポートを ITC-LMS で提出してください．

[1] $H = \ell^2$ 上の作用素 A, B を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
&D(A) = D(B) = \{x = (x_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty\},\\
&(Ax)_n = \begin{cases} x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n, & n = 1 \text{ の時,} \\ n x_n, & n > 1 \text{ の時,} \end{cases}\\
&(Bx)_n = -n x_n.
\end{aligned}$$

(1) A, B はいずれも稠密に定義された閉作用素であることを示せ．
(2) $A + B$ は可閉でないことを示せ．

[2] $\mathbb{R}$ 上の複素数値 Lebesgue 可測関数で，その本質的値域が複素平面全体になるものの例を挙げよ．

[3] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を μ とし，$H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ とする．$F(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値連続関数とし，それによる H 上の掛け算作用素を M_F とする．このとき $\sigma(M_F) = \overline{F(\mathbb{R})}$ であることを示せ．

[4] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を考える．$\mathbb{R}$ 上の実数値可測関数 $F(x)$ を取り，

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid Ff \in L^2(\mathbb{R})\}$$

とおいて，$f \in D(A)$ のとき，$(Af)(x) = F(x)f(x)$ とおくことにより，線形作用素 A を定める．この A のスペクトル分解に現れる単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ はどのようなものか，記述せよ．

[5] $H = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H$ とする．$D(A)$ を定義域とする作用素 A を，$(Af)(x) = f''(x)$ で定める．このとき A は可閉であって，その閉包が自己共役になることを示せ．

[6] A を Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素とし，$A \geq 0$ とする．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ をそのスペクトル分解としたとき，$\displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^{1/2} \, dE(\lambda)$ は $A^{1/2}$ に等しいことを示せ．

[7] 複素平面の開単位円板の上の正則関数 $f(z)$ で，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と Taylor 展開した時に $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ となるようなもの全体のなす空間を H^2 と書く．このような $f(z)$ を $\{c_n\}_n \in \ell^2$ と同一視することにより，H^2 は Hilbert 空間になる．

$$D(A) = \left\{ f \in H^2 \mid i\frac{1+z}{1-z} f(z) \in H^2 \right\}$$

とおき，$f \in D(A)$ に対して $(Af)(z) = i\frac{1+z}{1-z} f(z)$ とおく．

(1) $D(A)$ は H^2 で稠密で，A は対称作用素であることを示せ．

(2) A の Cayley 変換を求めよ．