

解析学 XD・スペクトル理論レポート問題

2010年1月18日

河東泰之(かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

以下の問題を解いて、レポートを提出してください。締め切りは2月3日(水)、提出先は1階事務室です。

[1] A を Hilbert 空間の上のコンパクト自己共役作用素とする。この A をスペクトル分解するときに現れる単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ はどのようなものか、記述せよ。

[2] \mathbf{R} 上の Lebesgue 測度を考える。 \mathbf{R} 上の実数値可測関数 $F(x)$ を取り、

$$D(A) = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid Ff \in L^2(\mathbf{R})\}$$

とにおいて、 $f \in D(A)$ のとき、 $Af = Ff$ とおくことにより、線形作用素 A を定める。 (Ff) は関数 F と f の掛け算である。) この A のスペクトル分解に現れる単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ はどのようなものか、記述せよ。

[3] A を、Hilbert 空間 H の上の自己共役作用素とし、 $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ を A のスペクトル分解とする。実数 t に対し、 U_t を $U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE(\lambda)$ とおく。

- (1) U_t は、作用素の強収束に関して、 t について連続であることを示せ。
- (2) U_t が、ノルム収束に関して、 t について連続であるための条件を求めよ。

[4] $\{\alpha_n\}_n$ を複素数列とする。 H を可分な無限次元 Hilbert 空間、 $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ をその完全正規直交系とする。 e_n たちの有限1次結合全体のなす空間を D とおき、 D を定義域とする線形作用素 A を $Ae_n = \alpha_n e_{2n}$ によって定める。

- (1) A は可閉であることを示し、 A の閉包 B を具体的に記述せよ。
- (2) A^* はどのような作用素か。具体的に記述せよ。

[5] $\{T_n\}_n$ を Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素の列とし、 T の H 上の有界線形作用素であるとする。

(1) $\{\|T_n\|\}_n$ が有界であり、 H のある稠密な部分空間 H_0 について、任意の $x \in H_0$ に対して $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$ となるならば、任意の $x \in H$ に対して $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ。

(2) 上の (1) で $\{\|T_n\|\}_n$ の有界性を落とした場合の反例を挙げよ。

[6] $H = L^2(\mathbf{R})$, $H_0 = C_0^\infty(\mathbf{R})$ とし、 H_0 を Hilbert 空間 H の部分空間とみなす。 H_0 を定義域とする作用素 A を、 $(Af)(x) = f''(x)$ で定める。このとき A は可閉であって、その閉包が自己共役になることを示せ。