解析学 XD・スペクトル理論レポート問題解説

2005 年 2 月 23 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

概してよくできていました．7 問中，5 問半以上できていれば A にしてあります．レポート提出者は 16 名，成績が A, B, C, D の人はそれぞれ，11, 1, 2, 2 人でした．ごく簡単な説明を下につけておきます．

[1] よくできていたので特に解説はしません．

[2] A^*A は自己共役で，ユニタリ対角化できるので，固有値を求めることにより，ノルムが簡単に $15+\sqrt{221}$ と求まります．[1] より，これの平方根が A のノルムです．A 自身はユニタリ対角化できないので，A の固有値を求めても仕方ありません．

[3] A が対称なことはすぐにわかります．自己共役であることを示すには，$\mathrm{Ker}(A^*\pm i)=0$ を示すか，$\mathrm{Im}(A\pm i)$ が稠密であることを示します．あるいは，Fourier 変換すればもっとすぐにできます．

[4] 定義どおりまじめにやれば割と簡単にできます．よくできていました．

[5] 授業でやった，$D(A^*)$ が稠密でない例と類似の工夫をすればできます．だいたいは同じような作り方でしたが，細かい点はいろいろな工夫がありました．

[6] $D(A)$ は，$\{(1-z)g \mid g\in H^2\}$ であることを用いて稠密性を示します．対称であることは単に計算すればできます．Cayley 変換 U は，$(Uf)(z)=zf(z)$ になります．

[7] 0 以外のスペクトルはすべて実数で多重度有限の固有値で，たかだか可算個しかなく，0 以外の集積点を持ちません．そこでそれらの固有値を $\{\lambda_n\}_n$ と書き，固有値 λ_n の固有空間への直交射影を P_n と書けば $A=\sum_n \lambda_n P_n$ (強収束) と書けることになります．