

2005年1月14日

河東泰之(かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323号室(電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

以下の問題を解いて, レポートを提出してください. 締め切りは2月7日(月), 提出先は1階事務室です.

[1] A を Hilbert 空間 H 上の有界線形自己共役作用素とする. このとき次の式を示せ.

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

[2] 次の行列を Hilbert 空間 C^2 から C^2 への線形写像とみなしたときのノルムを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

[3] $H = L^2(\mathbf{R})$, $H_0 = C_0^\infty(\mathbf{R})$ とし, H_0 を Hilbert 空間 H の部分空間とみなす. H_0 を定義域とする作用素 A を, $(Af)(x) = if'(x)$ で定める. このとき A は closable であって, その閉包が自己共役になることを示せ.

[4] A, B を, Hilbert 空間 H 上の閉対称作用素とし, A, B の定義域はいずれも H で稠密とする. この A, B の Cayley 変換をそれぞれ U, V としたとき, $A \subset B$ となる必要十分条件は $U \subset V$ であることを示せ.

[5] Hilbert 空間 H の稠密な部分空間上で定義された線形作用素 A で, $D(A^*) = \{0\}$ とものの例をあげよ.

[6] 複素平面の開単位円板の上の正則関数 $f(z)$ で, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と Taylor 展開した時に $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ となるようなもの全体のなす空間を H^2 と書く. このような $f(z)$ を $\{c_n\}_n \in \ell^2$ と同一視することにより, H^2 は Hilbert 空間になる.

$$D(A) = \left\{ f \in H^2 \mid i \frac{1+z}{1-z} f(z) \in H^2 \right\}$$

とおき, $f \in D(A)$ に対して $Af(z) = i \frac{1+z}{1-z} f(z)$ とおく.

- (1) $D(A)$ は H^2 で稠密で, A は対称作用素であることを示せ.
- (2) A の Cayley 変換を求めよ.

[7] A を無限次元可分 Hilbert 空間 H 上の線型自己共役 compact 作用素とする. A のスペクトル分解はどのようなものか, 記述せよ.