数学 IV・固有値と対角化について

1997 年 12 月 12 日
河東泰之

・2 次行列の場合.

[2A] 固有値が，相異なる 2 根，α, βの場合.

α, βに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, yとし，$X = (x, y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

[2B] 固有値が 2 重根αの場合.

行列 $A - \alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 なので，像は原点だけか，または直線である.

(1) $A - \alpha I$の像が原点だけの場合.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である.

(2) $A - \alpha I$の像が直線の場合.

その直線上の 0 でないベクトルを x とする．$(A - \alpha I)x = cx$ となる数 c があるので，$\alpha + c$ は固有値であるが，今固有値はαしかないので，$c = 0$ であり，$Ax = \alpha x$ である．次に x と平行ではないベクトル yを取る．$(A - \alpha)y = ax$ となる数 a がある.

(i) $a = 0$ の場合．場合 (1) の方になってしまうので矛盾する.

(ii) $a \neq 0$ の場合．yを y/a で置き換えることにより，$(A - \alpha)y = x$ とできる．$X = (x, y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

になる.

・3 次行列の場合.

[3A] 固有値が，相異なる 3 根，α, β, γの場合.

α, β, γに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, y, zとし，$X = (x, y, z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

[3B] 固有値が，3 重根αの場合.

行列 $A - \alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 なので，像は原点だけか，直線か，または平面である.

(1) $A-\alpha I$の像が原点だけの場合.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

である.

(2) $A-\alpha I$の像が直線の場合．まず像から0でないベクトルxを取る．[2B] (2) の場合と同様にして，$Ax=\alpha x$ である．ベクトルy, zを $\det(x,y,z)\neq 0$ となるように取る．この時，$(A-\alpha)y=ax$, $(A-\alpha)z=bx$ となる数a, bがある．ここで，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ である.

(i) $a\neq 0$, $b=0$ の場合．$Ay=\alpha y+x$, $Az=\alpha z$としてよい．$X=(x,y,z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

(ii) $a=0$, $b\neq 0$ の場合．(i) と同様である.

(iii) $a\neq 0$, $b\neq 0$ の場合．$(A-\alpha)y=x$, $(A-\alpha)z=x$ としてよい．$X=(x,y,y-z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

(3) $A-\alpha I$の像が平面の場合.

その像から，互いに平行ではない2本のベクトルx, yを取る．その平面上で，Aを考えればそれは2×2行列で表され，その固有値はαだけなので，上の [2B] が適用できる.

(i) [2B](1) の場合． $Ax=\alpha x$, $Ay=\alpha y$である．この時，この平面上にないベクトルzを取って$(A-\alpha)z$を見れば，これは0ではない．(これが0であれば，$A=\alpha I$となって (3) の仮定に矛盾する.) 改めて，これをxとおき直して，$X=(x,z,y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

となるが，これは$A-\alpha I$の像が直線であることを意味し，(3) の仮定に矛盾するから起こり得ない.

(ii) [2B](2) の場合．$Ax=\alpha x$, $Ay=\alpha y+x$ と仮定してよい．この像の平面上にないベクトルzを取って$(A-\alpha)z$を見ればそれは，$ax+by$の形である.

(a) $a=0$, $b\neq 0$ の時．$b=1$ としてよいので，$X=(x,y,z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

(b) $a=0, b=0$ の時．これは $A-\alpha I$の像が直線であることを意味し，(3) の仮定に矛盾するから起こり得ない．

(c) $a \neq 0$ の時．zを $z-ay$で置き換えれば，上の $a=0$ の場合に帰着できる．

[3C] 固有値が，2 重根αと他の根βの場合．($\alpha \neq \beta$.)

α, βに対応する固有ベクトル x, yを取る．行列 $A-\alpha I$の像を見る．この行列の行列式は 0 であり，また yは像に入るので，像は直線か，または平面である．

(1) $A-\alpha I$の像が直線の場合．

原点と x, yの乗っている平面上にないベクトル zを取る．$(A-\alpha)z = ay$となる数 a がある．

(i) $a=0$ の時．$X=(x, z, y)$ とすれば，$\det X \neq 0$ であり，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(ii) $a \neq 0$ の時．$Az = \alpha z + y$としてよい．zを $z + ay/(\alpha - \beta)$ で置き換えれば，(i) に帰着．

(2) $A-\alpha I$の像が平面の場合．

この平面から，yに平行でないベクトル zを取る．$Az = \alpha z + ay + bz$となる数 a, b がある．

(i) $a=0$ の時．$Az = (\alpha + b)z$となり，$\alpha + b$ は固有値である．固有値βに対応する固有ベクトルは yに平行なものだけだから，この固有値$\alpha + b$ はαに等しい．つまり $b=0$ である．$\det(x, y, z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて $A-\alpha I$の像が平面であることに矛盾する．つまり，$\det(x, y, z) = 0$ であり，z の取りかたから，$z = cx + dy$の形に書けて，$c \neq 0$ である．よって，像の平面に x が含まれる．

(ii) $a \neq 0$ の時．$a=1$ としてよく，$(A - \alpha - b)z = y$となる．$\det(x, y, z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + b \end{pmatrix}$$

の形にできるが，この行列の固有値は$\alpha, \beta, \alpha + b$ だから $b=0$ となる．これは $A-\alpha I$の像が平面という (2) の仮定に矛盾する．だから $\det(x, y, z) = 0$ であり，これより $z = cx + dy$の形に書けて，$c \neq 0$ である．よって，やはり像の平面に x が含まれる．

以上より，次の場合を考えればよい．

$(2)'$ $A-\alpha I$の像が平面でその平面に x も含まれる場合．

新たにベクトル zを平面の外に取る．$\det(x, y, z) \neq 0$ であり，$Az = \alpha z + ax + by$となる数 a, b がある．

(a) $a=0, b=0$ の時．$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，$A-\alpha I$の像が像が平面であることに矛盾する．

(b) $a=0, b\neq 0$ の時．$b=1$ としてよいので，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，$A-\alpha I$の像が平面であることに矛盾する．

(c) $a\neq 0$ の時．zを，$z+by/(\alpha-\beta)$ で置き換えれば，$Az=\alpha z+ax$ とできる．$a=1$ としてよいので，$X=(x,z,y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる．