

1998 年 2 月 19 日

河東泰之

みんな計算で引っかかっているので、配点は [1] から順に 20, 20, 30, 30, 30, 30 点の合計 160 点満点にしました。つまり、[1], [2] を解いて後残りのうち 2 問できれば 100 点と言うわけです。正しい方針でやっているものには、計算ミスがあったり途中で終わっていたりしても部分点をかなりつけてあります。この点数 x_2 が上に赤で書いてあります。中間テストの点数を x_1 とすると、最終成績 x は前に予告したとおり、 $x = 0.3 \max(x_1, x_2) + 0.7x_2$ として計算します。(100 点を超えたら 100 点で頭打ちです。) これが青で書いてある点数です。

期末テスト自体の最高点は 120 点、平均点は 63.5 点、その得点の分布は次のとおりです。採点ミスがあると思う人は、ただちに申し出て下さい。(返却する答案は、すべてコピーが取ってあります。)

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-120
22 (人)	11	14	8	15	2	7

最終成績 (青い数字) の平均点は 66.5 点、その得点の分布は次のとおりです。

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100
17(人)	10	17	8	16	4	7

以下略解と解説です。

[1] 3 次方程式を解くと 3 重根 3 を得るので、解は $y = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ の形です。係数を合わせて、答は $y = (2x^2 - x + 1)e^{3x}$ となります。係数の計算ミスは 10 点減点です。

[2] $t^3 + 3t^2 - 4t = (t - 1)(t + 2)^2 = 0$ を解いて重根 -2 と単根 1 が出るので、解は $a_n = (an + b)(-2)^n + c$ の形です。係数を合わせて $a_n = (n + 3)(-2)^n + 10$ となります。係数の計算ミスは 10 点減点です。

[3] まず固有値は 3(重根) と -1 です。普通の方法でやると、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

で、このとき、

$$B = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

だから,

$$e^{tA} = X e^{tB} X^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 2e^{3t} - 2te^{3t} & 3e^{-t} - 3e^{3t} - 2te^{3t} & -2e^{-t} + 2e^{3t} + te^{3t} \\ -6e^{-t} + 6e^{3t} + 2te^{3t} & -6e^{-t} + 7e^{3t} + 2te^{3t} & 4e^{-t} - 4e^{3t} - te^{3t} \\ -6e^{-t} + 6e^{3t} & -6e^{-t} + 6e^{3t} & 4e^{-t} - 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

となります.

これは一番計算がめんどうです. A の Jordan 標準型までだと 10 点, e^{tB} までで 20 点です.

[4] $AB = BA$ とならなくてはいけないので, $t = 15$ が必要なことはすぐわかります. 一方, A の固有値は 1, 2, 3 で, このとき,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

より

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X^{-1}BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となっているのでこれが答です.

いきなり A の対角化から始めても $t = 15$ という答が出ますが, それでは論理的に不十分なので 5 点減点です. つまり, X の選び方は一通りではないので, 自分の選んだ X について $X^{-1}BX$ が対角行列でなくても, 別の X については $X^{-1}BX$ が対角行列になるかもしれないからです. (本当はそういうことはおきないんですが, それを主張するにはちゃんとした根拠が必要です.) また実は, $AB = BA$ になるようにして, A の固有値が 3 つとも違うことをチェックすればそれだけでよくて, そうやっている人もいましたが, これにもちゃんと理由を書かないと減点です.

A の対角化で終わっていれば 15 点です.

[5] A の固有値は 1(重根), 2 なので,

$$Y = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

として,

$$B = Y^{-1}AY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となります. これより,

$$A^{10} = YB^{10}Y^{-1} = Y \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} Y^{-1}$$

ですが、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

であることより、

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = YZ$$

とおけば、

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -1/5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/10 & -1 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, X^{-1}A^{10}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

となります。

上の

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

を答にしている人がたくさんいましたが、これは Jordan 標準型ではありません。この形の人は 20 点です。

また、 X を求めなくてよければ、固有値を求めたあとほとんど計算しなくても Jordan 標準型が上の形であることはすぐにわかってしまいます。そうやって、正しい Jordan 標準型に到達している人は 25 点です。

[6] 固有方程式は t にかかわらず $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ だから、その解は $x = 1$ (重根) と $x = 2$ です。問題の条件を満たすための必要十分条件は、 $A - I$ の rank が 1 となることです。

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -6t + 5 & 15t - 10 & -9t + 6 \\ -10t + 9 & 25t - 20 & -15t + 12 \end{pmatrix}$$

なので、この条件は 2 行目と 3 行目が 1 行目に平行、ということで、この条件を解くと $t = 1$ となります。

これは固有方程式が t と無関係なんですけど、計算の結果そうならなかった人がたくさんいました。「固有値が 3 つとも異なる」ための条件を求めようとしている人がたくさんいましたが、それは違います。