

1996 年 2 月 20 日

河東泰之

まず，答案に書いてある左側の赤字（細字）が期末試験の点数（110 点満点），右側の赤字（太字）が，12 月の中間テストも考慮した総合的な点数（100 点で頭打ち）です．

期末試験の配点は 1 番から順に，20, 20, 15, 20, 15, 20 点で，110 点満点です．平均点は 63.6 点，その得点の分布は次のとおりです．採点ミスがあると思う人は，ただちに申し出て下さい（返却する答案は，すべてコピーが取っております．）

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-110
13 (人)	13	9	6	8	6	4

総合成績の平均点は 66.3 点，その得点の分布は次のとおりです．

0-49 (点)	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100
9(人)	14	11	7	5	9	4

以下，略解を付けます．

[1] 普通に直交対角化すればよい．答は，楕円 $4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を正の向きに $\pi/6$ 回転したもの．（図は略．）

[2]

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

とすれば， $A = XBX^{-1}$ である．（つまり A の Jordan 標準型は B である．）

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから，

$$A^n = XB^nX^{-1} = \begin{pmatrix} -(n+2)2^{n-1} + 2 & -(n+8)2^{n-1} + 4 & (n+4)2^{n-1} - 2 \\ -2^n + 1 & -2^n + 2 & 2^n - 1 \\ -(n+6)2^{n-1} + 3 & -(n+12)2^{n-1} + 6 & (n+8)2^{n-1} - 3 \end{pmatrix}$$

である．

[3] 普通に 3 次方程式を解くと，重根 3 と単根 -1 を得る．あとは係数をあわせて，答は $y = -e^{3x} + 2xe^{3x} + e^{-x}$ である．

2

[4] 普通に 3 次方程式を解くと, 3 重根 2 を得る. あとは係数をあわせて, 答は $a_n = 2^n(-n^2 + 3n - 1)$ である.

[5] $A^t A = I$ を解けばよい. ($A^{-1} = {}^t A$ を解くのはめんどろ.) 答は $a = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}}$ である. (複号同順ではない—答は 8 通り.)

[6] 固有方程式は $x^3 - 5x^2 + (2a + 6)x - 4a = 0$ であり, まずこれが重根を持つことが必要である. これが $(x - 2)(x^2 - 3x + 2a) = 0$ と因数分解できるので, $x = 2$ が $x^2 - 3x + 2a = 0$ を満たすか, または $x^2 - 3x + 2a = 0$ が重根を持つかである. これより, $a = 1, \frac{9}{8}$ を得るが, これらの時実際に対角化可能ではないことが rank の計算からチェックできるので, これが答である.