数学 IV・固有値と対角化について

1995 年 11 月
河東泰之

・2 次行列の場合.

[2A] 固有値が，相異なる 2 根，α, βの場合.

α, βに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, yとし，$X = (x, y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

[2B] 固有値が 2 重根αの場合.

行列 $A - \alpha I$の値域を見る．この行列の行列式は 0 なので，値域は原点だけか，または直線である.

(1) 原点だけの場合.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である.

(2) 直線の場合.

その直線上の 0 でないベクトルを x とする．$Ax = \alpha x$ である．次に x と平行ではないベクトル yを取る．$(A - \alpha)y = ax$ となる数 a がある.

(i) $a = 0$ の場合．矛盾する.

(ii) $a \neq 0$ の場合．$(A - \alpha)y = x$ とできる．$X = (x, y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

・3 次行列の場合.

[3A] 固有値が，相異なる 3 根，α, β, γの場合.

α, β, γに対応する固有ベクトルをそれぞれ x, y, zとし，$X = (x, y, z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

[3B] 固有値が，3 重根αの場合.

行列 $A - \alpha I$の値域を見る．この行列の行列式は 0 なので，値域は原点だけか，直線か，または平面である.

(1) 原点だけの場合.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である.

(2) 直線の場合. まずαに対応する固有ベクトル x を一つ取る. すると $Ax = \alpha x$ である. ベクトル y, zを $\det(x, y, z) \neq 0$ となるように取る. この時, $(A - \alpha)y = ax$, $(A - \alpha)z = bx$ となる数 a, b がある. ここで, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ である.

(i) $a \neq 0$, $b = 0$ の場合. $Ay = \alpha y + x$, $Az = \alpha z$としてよい. $X = (x, y, z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) $a = 0$, $b \neq 0$ の場合. (i) と同様である.

(iii) $a \neq 0$, $b \neq 0$ の場合. $(A - \alpha)y = x$, $(A - \alpha)z = x$ としてよい. $X = (x, y, y - z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(3) 平面の場合.

その値域から, 互いに平行ではない 2 本のベクトル x, yを取る. その平面上で, A を考えれば, 上の [2B] が適用できる.

(i) [2B](1) の場合. $Ax = \alpha x$, $Ay = \alpha y$である. この時, この平面上にないベクトル zを取って $(A - \alpha)z$を見れば, これは 0 ではない. 改めて, これを x とおき直して, $X = (x, z, y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となって矛盾.

(ii) [2B](2) の場合. $Ax = \alpha x$, $Ay = \alpha y + x$ と仮定してよい. この平面上にないベクトル zを取って $(A - \alpha)z$を見ればそれは, $ax + by$の形である.

(a) $a = 0$, $b \neq 0$ の時. $b = 1$ としてよいので, $X = (x, y, z)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(b) $a = 0, b = 0$ の時. 矛盾.

(c) $a \neq 0$ の時. zを $z - ay$で置き換えれば, 上の $a = 0$ の場合に帰着できる.

[3C] 固有値が, 2 重根αと他の根βの場合. $(\alpha \neq \beta.)$

α, βに対応する固有ベクトル x, yを取る．行列 $A-\alpha I$の値域を見る．この行列の行列式は 0 であり，また yは値域に入るので，値域は直線か，または平面である．

(1) 直線の場合.

x, yの乗っている平面上にないベクトル zを取る．$(A-\alpha)z = ay$となる数 a がある．

(i) $a=0$ の時．$X=(x,z,y)$ とすれば,

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(ii) $a \neq 0$ の時．$Az = \alpha z + y$としてよい．zを $z + y/(\alpha-\beta)$ で置き換えれば，(i) に帰着.

(2) 平面の場合.

この平面から，yに平行でないベクトル zを取る．$Az = \alpha z + ay + bz$となる数 a, b がある.

(i) $a=0$ の時．$Az = (\alpha+b)z$となり，$\det(x,y,z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+b \end{pmatrix}$$

の形にできて値域が平面であることに矛盾する．zの取りかたから，$z = cx + dy$の形に書け，$c \neq 0$ である．よって，値域の平面に x が含まれる.

(ii) $a \neq 0$ の時．$a=1$ としてよく，$(A-\alpha-b)z = y$となる．$\det(x,y,z) \neq 0$ とすると，$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+b \end{pmatrix}$$

の形にできて矛盾する．zの取りかたから，$z = cx + dy$の形に書け，$c \neq 0$ である．よって，やはり値域の平面に x が含まれる.

以上より，次の場合を考えればよい.

(2)$'$ 平面でその平面に x も含まれる場合.

新たにベクトル zを平面の外に取る．$\det(x,y,z) \neq 0$ であり，$Az = \alpha z + ax + by$となる数 a, b がある.

(a) $a=0, b=0$ の時．$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，値域が平面であることに矛盾する.

(b) $a=0, b \neq 0$ の時．$X^{-1}AX$を

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の形にできて，値域が平面であることに矛盾する．

(c) $a \neq 0$ の時．zを，$z + by/(\alpha - \beta)$ で置き換えれば，$Az = \alpha z + ax$ とできる．$a = 1$ としてよいので，$X = (x, z, y)$ とすれば，

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$