1998年度理科II, III類1年生 数学IA演習・小テスト(4)解説

1998年5月19日・河東泰之
数理科学研究科棟310号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は[1]から順に 10×4, 15×2, 30点です．[1]は言葉の定義が分かっているかどうかだけの問題です．間違えた人はよく復習しておいてください．平均は61.3点，最高は100点(9人)でした．下に略解をつけます．

[1] それぞれ簡単な例 $\{\alpha_n\}_n$ を一つずつあげます．実際の答案ではもっと説明が必要です．
(1) $\alpha_1=0$, $\alpha_n=1,(n\geq 2)$.
(2) $\alpha_1=\alpha+1$, $\alpha_2=\alpha-1$, $\alpha_n=\alpha,(n\geq 3)$. (この問題の文章は，$\alpha$ が1つ与えられているのかどうか曖昧でした．だから，特定の $\alpha=0$ 等で作ったものでも正解です．どちらにしろ問題の本質は同じです．)
(3) $\alpha_n=1/n$.
(4) $1,0,-1$ の3つを無限に繰り返した数列.

[2] (1) Cauchy列の定義どおりにやってもできるし，単調増大なので,「上に有界(たとえば1が上界) $\Rightarrow$ 収束する $\Rightarrow$ Cauchy列だ」とやってもできます.
(2) $\alpha_n=1-1/10^n$ だから，簡単にできます. (収束の証明にはまだ厳密に扱っていないlogなどは使わないでやってほしかったんですが，使ってあっても減点はしていません．$10^n>n$ を使えばlogはいりません．)

[3] 0以上の整数 k に対し，$\beta_k=\sup\limits_n \alpha_{k+n}$ とおく．仮定より $\beta_0=\alpha$ であり，また $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ は下に有界な単調減少数列である．背理法で $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ を示すため，この等式が成り立たないと仮定しよう．すると，どこかの k で，$\beta_k<\alpha$ となっていなくてはならない．このとき，$\alpha=\sup\alpha_n=\sup\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\beta_k\}$ だが，$\alpha_n=\alpha$ となる番号 n は存在しないと言う仮定と，$\beta_k<\alpha$ により，$k+1$ 個の数 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\beta_k$ は，すべて α より小さいので，これは矛盾である．よって，$\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ が証明された.

5月12日の演習の時間にも言いましたが，参考書で有名なものとしては，高木貞治「解析概論」(岩波書店)と小平邦彦「解析入門」(岩波書店)があります．実数の切断についてはこの2つが詳しく，他の本では切断のことをあまり書いていないこともよくありますが，それ以降の話題(極限/微分/積分など)については，どの解析学の本でも，ほぼ同様の内容が書いてあります.

よくわからない，ということを何人かの学生に言われましたが，最大の理由は，抽象的な厳密理論というものに慣れていないと言うことでしょう．実数，極限などと言うものについて当然すでにかなりのイメージを持っているわけで，そういうイメージは当然重要ですが，何かを証明する時には，定義とすでに証明したことしか使ってはいけないわけです．それから，背理法や，対偶を証明するということをたびたび使っていますが，そういう否定の取り方に慣れていないと言うこともあると思います．たとえば，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$ の否定は,

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ \exists x\ \ [\,0<|x-a|<\delta \text{ and } |f(x)-\alpha|\geq\varepsilon\,]$$

ですが，こういうのに慣れることも必要です．

演習の点のつけ方は，前にも言ったとおり，全体の小テストのうち，悪い方から 2 回分を除いた点数の平均によって，演習の成績をつけます．(欠席の回は 0 点として扱います．) その平均そのものでは多分点数として低すぎるので，プラスアルファを考慮しますが，それについては，講義の方の期末試験の成績も加味します．小テストの点数が低いのは，難しめの問題も出しているからですが，そういう問題を出す理由は次のとおりです．(今回のはそんなに難しくない方ですが．)

演習の形態としては，問題を配って，それを学生が黒板で解いて説明すると言うのが伝統的な方法で，私も前に数学 IA を理科 I 類で教えた時はそうしていました．しかし，学生が 50〜100 人と言った人数でいると，そういうやり方では全然順番がまわらなくて効果がありません．そこで，今年のように毎回テストと言う方式にしています．ですが，やはり基本は自分でゆっくり考えるということなので，試験時間中にわからなかったことは，あとでゆっくり自分で考えてもらって，それで身につけばいいというつもりで問題を出しています．もちろん，その場で全部わかる人はそれでいいんですが，そういう人がたくさんいるつもりではやっていません．だから，別にその場ですぐにできなくても，試験のあとで，または答案・解説を返してもらった後で理解してくれれば，それでけっこうです．