1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (2) の解説

1998 年 4 月 28 日・河東泰之

今回のはなかなかハードで，何を書いていいのかよくわからなかった人も少なくないでしょう．だんだんもっと「普通」の問題になっていくのでそんなに心配することはありません．また，演習のテストの点はかなり難しめのものも入れるので，点は低めになりますが，めちゃくちゃに低い点をつけるようなつもりはないので，ちゃんとやっていればだいじょうぶです．私の大体の採点の傾向は，最初の日に配ったプリントにあるとおりです．

配点は各問 40 点の 120 点満点です．平均は 33.3 点，最高は 120 点 (1 人) でした．下に略解をつけます．(これはあくまでも略解です．授業でやったこととよく比べてみてください．)

[1] 実数α, βがそれぞれ，切断 (A, A'), (B, B') で表されているとします．このとき，$\alpha < \beta$でも$\alpha = \beta$でもなかったと仮定します．このとき，$a \in A, a \notin B$となる有理数 a が存在します．$a \in B'$ なので，Bの元はすべて，a よりも小さいことがわかります．a より小さい有理数はすべて，A の元だから $B \subset A$ です．今 $A \neq B$だから，$\beta < \alpha$となります．

$\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$の内の 2 つが同時に成り立ち得ないことは定義からわかります．

いきなり，$A \subset B$, $A = B$, $B \subset A$ のいずれかが成り立つ，としている人が非常に多くいましたが，それは大きな論理の飛躍です．

[2] 実数α, βがそれぞれ，切断 (A, A'), (B, B') で表されているとします．このとき，$C = B + (-A')$ とおき，その (有理数の集合内での) 補集合を C'とおきます．すると，授業でやったのと同様にして，(C, C') が有理数の切断であることがわかります．これをγとおくと，やはり授業でやったのと同様にして$\alpha + \gamma = \beta$であることがわかります．(少し簡単に書いています．)

$\gamma' < \gamma$または，$\gamma' > \gamma$のときは，$\alpha + \gamma' < \beta$または$\alpha + \gamma' > \beta$ですから，ほかのγ'で$\alpha + \gamma' = \beta$となることはありません．

「実数の足し算の定義に基づき」という問題の意図は，上のようにやってほしかったんですが，授業でやった$-\alpha$の性質を使っていても O.K. にしてあります．

[3] 実数αが，切断 (A, A') で表されているとします．$B = \{a/2 \mid a \in A\}$, $B' = \{a/2 \mid a \in A'\}$ とおけば，(B, B') は有理数の切断になり，この実数をβと書けば，$\beta + \beta = \alpha$であることが，定義を順にチェックすることによってわかります．