1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト解説 (11)

1998 年 7 月 7 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/˜yasuyuki/

配点は [1] から順に 40, 30, 10×3 点です．平均点は 44.4 点，最高は 100 点 (3 人) でした．

[1] $0 \le x \le \pi/2$ の範囲では，$\dfrac{2x}{\pi} \le \sin x \le 1$ だから，$\log \dfrac{2}{\pi} + \log x \le \log \sin x \le 0$ になります．ここで，$\log \dfrac{2}{\pi} + \log x$ が $[0, \pi/2]$ で広義積分できることはすぐわかるので，$\log \sin x$ についても O.K. です．

$\log \sin x$ が負であることを忘れて反対向きの評価をしている人がけっこういました．また，広義積分の収束の問題が生じるのは $x \to 0$ の方であって，$x \to \pi/2$ の方は最初から何も問題はありません．

実はうまく置換積分を行うとちゃんと値が求まって，$-\dfrac{\pi}{2} \log 2$ になります．

[2] 置換積分で漸化式を求めて，

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ が偶数のとき}, \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3}, & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

となります．これは高校でもよくやるものですね．

[3] (1) Taylor 展開するか，あるいは微分するかで，$[0, 1]$ 上で $1 - x^2 \le e^{-x^2}$, $[0, \infty)$ 上で $1 + x^2 \le e^{x^2}$ がわかるので，n 乗して積分して問題の積分の不等式が出ます．

(2) 普通に置換積分すると，

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt < \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t \, dt$$

となります．

(3) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, dt$ とおくと，(2) より $\sqrt{n} I_{2n+1} < I < \sqrt{n} I_{2n-2}$ となるので $1 < \dfrac{I}{\sqrt{n} I_{2n+1}} < \dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n+1}}$ がわかります．(I_n は [2] の積分．) 一方，$0 \le \sin x \le 1$ より $I_n > I_{n+1} > I_{n+2}$ で，[2] の答より $\dfrac{I_n}{I_{n+2}} \to 1$ だから，$\dfrac{I_n}{I_{n+1}} \to 1$ であって，上の不等式より $I = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} I_{2n+1}$ がわかります．すると

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n I_{2n+1} I_{2n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n\pi}{(2n+1)2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となるから，求める積分は $2I = \sqrt{\pi}$ です．

この積分は有名なもので，たとえば Mathematica でも公式としておぼえているので，すぐに答が返ってきます．これは本当は，あとでやる極座標を使うともっと簡単にできます．