1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (11)

1998 年 6 月 30 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/˜yasuyuki/

答案の一番上に氏名と学生証番号を書いてください. (組は書かなくてもけっこうです.) 自分のノートを参照してもけっこうです.

[1] 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ は収束することを示せ.

[2] 自然数 n に対し,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

とおく. この値を求めよ. (ヒント: 部分積分を使えばできる. 他の方法でできればこのヒントに従う必要はない.)

[3] (1) 次の不等式を示せ.（ただし, n は自然数である.）

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} \, dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx.$$

(2) 第一の積分で $x = \cos t$, 第二の積分で $x = t/\sqrt{n}$, 第三の積分で $x = 1/\tan t$ という変数変換を行って得られる不等式を書け.

(3) (2) と [2] の結果を使って, 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx$ の値を求めよ.