1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (9)
1998 年 6 月 16 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

答案の一番上に氏名と学生証番号を書いてください．(組は書かなくてもけっこうです．) 自分のノートを参照してもけっこうです．

[1] $\mathbf{R}^2$の上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を次のように定める．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ の時.}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ の時.}\end{cases}$$

(1) この関数は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能であるか．理由をつけて答えよ．
(2) $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

[2] $\mathbf{R}^2$で定義された 2 変数の C^2級関数 $f(x,y)$ が，すべての実数 t に対して $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$ を満たしているとする．このとき，

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$$

を $f(x,y)$ で表せ．

[3] $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$は，$(x,y)=(0,0)$ のまわりで無限級数に Taylor 展開できることを示し，その無限級数を求めよ．

[おまけ] 前回の [2] (2) の解答で，(授業でまだやっていない) 積分を使っているのではないかと言う質問が出ました．そう見えるのは確かにもっともですが，使っているわけではありません．使ったことは,「区間 (a,b) で $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ は定数」ということで，これは平均値の定理からわかります．