1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (6) 解説

1998 年 6 月 2 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] から順に 40, 30, 30 点です．平均点は 45.1 点，最高は 100 点 (1 人) でした．略解は次のとおりです．

[1] $f(x)$ は多項式なので無限回微分可能である．Taylor の定理より

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

となる．ξは x と a の間の数であるが，$f(x)$ は n 次多項式であることより最後の項は 0 である．よって，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

が答である．

どうもξの入った最後の項が 0 であるという認識のない人がたくさんいました．ξの入ったままの答でも正しいことは正しいわけですが，ちゃんと状況が分かっているとは思えませんので，大幅に減点しました．

また，いきなり$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$と書いている人もけっこういましたが，こう書くためには，ξの入っている部分が 0 に収束することを示す必要があります．今の場合,「収束している」どころか kが $n+1$ 以上のところではずっと 0 なわけですが，そのことをきちんとことわらなくてはいけません．また，ことわったあとであれば，実は無限和ではなくて有限和だという認識がなくてはいけません．

また n 次多項式と言っている以上，$f(x)$ が決まれば n は決まっているわけですが,「$\exists N$，$n > N \Rightarrow \cdots$」のように n がだんだん大きくなっていくかのように思っている人も少なからずいました．

[2] (1) $x \neq 0$ のとき，平均値の定理の拡張形によって

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となるξが x と 0 の間にある．$x \to 0$ のとき，$\xi \to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である．

(2) $F(x) = f(1/x)$, $G(x) = g(1/x)$ とおけば，(1) に帰着できて$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ であることがわかる．

(1) の方で，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x}}$$

ですが，$f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能とは言っていないのでこの変形ではできません．

[3] 逆関数の微分，合成関数の微分によって，

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}\cdots\frac{4k-5}{4}(1+x)^{1/4-k}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}\cdots\frac{4k-5}{4}\cdot\frac{x^k}{k!} \\ + (-1)^n\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}\cdots\frac{4n-1}{4}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(1+\xi)^{1/4-n-1} \end{aligned}$$

である．ここで，

$$\left|(-1)^n\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}\cdots\frac{4n-1}{4}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

であり，また$-1/2 < x < 1/2$ より，$\left|\dfrac{x}{1+\xi}\right| < 1$ であることが，授業でやった $\log(1+x)$ の Taylor 展開のときと同様にわかるので，

$$\left|x^{n+1}(1+\xi)^{1/4-n-1}\right| \leq 2^{1/4}\left|\frac{x}{1+\xi}\right|^{n+1} \to 1$$

である．これより，Taylor 展開ができて，答えは

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\frac{7}{4}\frac{11}{4}\cdots\frac{4k-5}{4}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

である．

剰余項 (ξの入った項) が 0 に収束することをきちんと示さなくてはいけません．いきなり無限級数を書くのは論理的に大幅な飛躍だし，その収束半径が 1(以上) であることを示しても，それでは Taylor 展開できることの証明になっていません．

本当はこの Taylor 展開は，$-1 < x < 1$ で正しい式ですが剰余項の評価を簡単にするため，$-1/2 < x < 1/2$ にしました．