1998 年度理科 II, III 類 1 年生 数学 IA 演習・小テスト (6)

1998 年 5 月 26 日・河東泰之
数理科学研究科棟 310 号室 (電話 5465-7024)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
homepage http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

答案の一番上に氏名と学生証番号を書いてください．(組は書かなくてもけっこうです．) 自分のノートを参照してもけっこうです．

[1] $f(x)$ を n 次の多項式とする．$f(x)$ を $x = a$ において Taylor 展開した式を求めよ．

[2] [ロピタルの定理] (1) $f(x), g(x)$ を，区間 $(-1, 1)$ で定義された連続関数で，$f(0) = g(0) = 0$ であるとする．$0 < |x| < 1$ で $f(x), g(x)$ は微分可能で，$x \neq 0$ のとき，$g'(x) \neq 0$ とする．もし，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して同じ値になることを示せ．

(2) $f(x), g(x)$ を，$x > 0$ の範囲で定義された連続関数で，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ であるとする．$x > 0$ で $f(x), g(x)$ は微分可能で $g'(x) \neq 0$ とする．もし，$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して同じ値になることを示せ．

ただし，関数 $f(x)$ に対し，$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ とは，

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0, \ \ x > N \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

ということである．

[3] $f(x) = (1 + x)^{1/4}$ は，$x = 0$ のまわりで Taylor 展開できて，その無限級数が $-1/2 < x < 1/2$ の範囲で $f(x)$ に収束することを示せ．