数学ＩＡ (理科Ｉ類 17,18,27,28 組) 後期期末テスト略解・解説

1995 年 2 月　河東泰之

答案の上に赤い数字が 2 つ書いてありますが，左側の数字が期末試験そのものの点数（各問 35 点，140 点満点）で，右側の点数（○で囲ってある数字）がこの科目の最終成績（教務課に提出したもの）です．また，演習を取っている人には演習の成績が，そのさらに右に青い数字で書いてあります．これらの算出法は次のとおりです．

まず，学期末試験の点数を，x_1 点，11 月 16 日の中間テストの点数を，y_1 点，1 月 11 日の中間テストの点数を，y_2 点とします.（x_1 が 100 を越えた場合は x_1 を 100 とおき直します.）そして，最終成績 x を

$$x = 0.6x_1 + 0.2\max(x_1, y_1) + 0.2\max(x_1, y_2)$$

と決めます.（これは，10 月に宣言した通りの決め方です.）

演習については，次のように成績を付けました．まず，

$$a = \min(30, \text{演習時間中に前で解いた年間通算回数} \times 6),$$
$$b = \text{年間 2 回のレポート（いずれも 30 点満点）のうちのいいほうの点数},$$
$$c = \text{年間 4 回の演習時間中のテストのうちいいほうから 2 回分の点数},$$

とおいて，演習の点数 y を，$y = \min(100, a + b + 0.35c)$ とするのですが，講義の最終成績 2 回の平均が 80 点以上でかつ，y よりも大きい場合は，講義の最終成績 2 回の平均を演習の成績にします.（これも，10 月に宣言した通りの決め方です．最後の規則が適用されて点数が上がった人は 4 人でした.）以上すべて，1 点未満は四捨五入しました.

期末試験そのものの平均点は，71 点，得点分布は次のとおりです.

0–39 (点)	40–59	60–79	80–99	100–119	120–139	140
7(人)	8	11	9	5	3	1

また，後期最終成績の平均は 69 点，得点分布は次のとおりです.

0–24 (点)	25–49	50–64	65–79	80–99	100
0(人)	8	9	9	9	9

演習の最終成績については，平均は 73 点，得点分布は次のとおりです.

0–24 (点)	25–49	50–64	65–79	80–99	100
3(人)	6	2	4	11	12

[1] これは難しすぎたようで，ほとんどの人が 0 点で，ちゃんとできた人は 1 人だけでした．まず，私の考えていた答から説明します．

$-1 < x < 1$ の時

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \tag{1}$$

です．右辺は収束半径 1 のべき級数なので，何回でも項別微分でき，2 回項別微分することにより，$-1 < x < 1$ で

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4x^3 + 6 \cdot 5x^4 + \cdots \tag{2}$$

を得ます．$-1 < x < 1$ の時 $0 \leq x^2 < 1$ ですから，x のかわりに x^2 を代入することができ，両辺 2 で割って，

(3)

$$\frac{1}{(1-x^2)^3} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}x^2 + \frac{4 \cdot 3}{2}x^4 + \frac{5 \cdot 4}{2}x^6 + \frac{6 \cdot 5}{2}x^8 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^{2n}$$

となります．この (3) の右辺は収束半径 1 のべき級数ですから，$-1 < x < 1$ の範囲で実解析的となり，$x = 0$ における Taylor 展開は，このべき級数自身になります．また，(3) のべき級数は，収束半径 1 を持ち，$x = \pm 1$ では明らかに収束しないので，上の等式が成り立つ範囲は，ちょうど $-1 < x < 1$ です．

こうやれば，ほとんど計算せずにすむ問題のつもりだったのですが，こうやった人は一人もいませんでした．

ほとんどの人が直接微分を繰り返して，ぐしゃぐしゃになっていました.（ただ微分して，Taylor 展開するだけなら，前期の問題のはずですね．わざわざ後期に出したのは，実解析関数の話を使って欲しかったからです.）微分する方針でできていたのは，

$$\frac{1}{(1-x^2)^3} = \cdots$$

と部分分数分解してそれぞれ微分する，というやり方の人だけでした．これなら，まあまあできるくらいの計算量です.（この部分分数分解も後期の内容でした.）

それから，(1) のかわりに，$-1 < x < 1$ の時

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

とやってから両辺 3 乗するという方針も 2 人いました．3 乗する計算さえちゃんとやれば，これはけっこう楽なのですが，実際は計算を間違えていました．

項別微分して，(2) のような式を出すというのは,「べき級数は収束半径内で実解析的になる」という証明のところでやったんですが，皆さんおぼえていないようでした．

[2]

[3] これは，極座標に変換する問題です.（それ以外の方法ではちょっとできないでしょう.）極座標では,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^4} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{4}e^{-r^4}\right]_0^{\infty}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

となります.（これで，広義積分がちゃんと収束していることもわかります.）これはかなりできていて，計算ミスがいくらかあったくらいです.

[4] これは，積分の順序を入れ替えれば計算が易しくなる，という問題でした.

$0 \le x \le 1$, $2-2\sqrt{1-x} \le y \le 2+2\sqrt{1-x}$ という条件は，$0 \le y \le 4$, $0 \le x \le y - y^2/4$ と書けるので，累次積分を

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_0^{y-y^2/4} xy^4\,dx\,dy &= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2}y^4\right]_0^{y-y^2/4}\,dy \\
&= \int_0^4 \frac{1}{32}(4y-y^2)y^4\,dy \\
&= \frac{1}{32}\int_0^4 y^8 - 8y^7 + 16y^6\,dy \\
&= \frac{1}{32}\left[\frac{y^9}{9} - y^8 + \frac{16}{7}y^7\right]_0^4 \\
&= \frac{4^8}{32}\left(\frac{4}{9} - 1 + \frac{4}{7}\right) \\
&= \frac{2048}{63}
\end{aligned}$$

と計算できます.

直接もとのままで計算してももちろんでき，計算を間違えなかった人はちゃんと同じ答になっていました．どちらにしろ，計算ミスはたくさんありました．正しい方針でやっていれば，計算ミスはそれほど減点していないつもりです.