数学 I A (理科 I 類 17,18,27,28 組) レポート・中間テスト解説

1995 年 1 月 23 日　河東泰之

・レポートについて

1 問 10 点，合計 30 点でつけてあります．[1], [2] はかなりできていましたが，[3] はほとんどの人が誤って,「正しい」と答えていました．

[1] これは前期のレポート問題だった演習の [26] にさらに条件を付けたものです．いくらでも例はありますが，例えば，

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le 1/2n \text{ の時}, \\ 2 - 2nx, & 1/2n \le x \le 1/n \text{ の時}, \\ 0, & 1/2n \le x \le 1 \text{ の時}. \end{cases}$$

とおけば，すべての $x \in [0,1]$ で，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ となることは明らかで，また，すべての n に対し，$\max_{0\le x\le 1} f_n(x) = 1$ ですから，関数列 $\{f_n(x)\}_n$は，閉区間 $[0,1]$ で，定数関数 0 に一様収束していません．そして，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

が成り立ちます．

ほかにも例はたくさんあり，場合分けのない一つの式でもかけます．

[2] まず普通にやると，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + (x-1)^2}\, dx &= \int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 - 4x + 2}\, dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{(2x-1)^2 + 1}\, dx \\ &= [\arctan(2x-1)]_{-1}^1 \\ &= \arctan 1 - \arctan(-3) \\ &= \frac{\pi}{4} + \arctan 3 \end{aligned}$$

となります．次に

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+(x-1)^2}\,dx \\
=&\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}\,dx \\
=&\int_{-1}^{0} \frac{0}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}\,dx+\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}\,dx \\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{0}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}\,dx+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}\,dx \\
=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{\varepsilon}^{1} \\
=&\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\right)+\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
=&\pi-\arctan 2
\end{aligned}
$$

となって，もう一つの答を得ます．二つの目の方で，一気に

$$
\left[\arctan\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{1}=0-\arctan 2
$$

とやると間違えてしまいます.（もとの関数の値は正で，この答は負ですからこれがおかしいことは計算しなくてもわかります.）なぜこの後の方はダメかというと，関数 $\arctan\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ は，$x=0$ で定義されていないので，この関数の微分が $\dfrac{1}{x^2\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+1\right)}$ に等しいという式を使うには $x=0$ の点をよけないといけないのです．

[3] これはほとんどできていませんでした.「何が問題なのかわからない」,「実解析関数の定義がそのまま書いてあるのではないか」という声もありましたが，問題に書いてある条件は実解析関数の定義とは違います.（よく見比べてください!）すなわち，問題文では「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ の収束半径が正である」と言っているだけですが，実解析関数になるためには，この収束したべき級数が（a を含む開区間で）$f(x)$ に等しくなることが必要です．そして，このことが成り立たない関数があるのです．つまり,「Taylor 展開で得られるべき級数は収束するが，もとの関数には一致しない」ということが起こり得ます．以下，その様な具体例をあげますが，この問題はちょっと難しすぎたようです．できなくても別に悲観することはありません.（期末試験にはこのようなレベルの問題は出ません.）

このような関数は実は大量にあるのですが，具体的に書いて，本当に条件を満たしていることを示すのは結構大変です．一番簡単そうな例は，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ の時}, \\ e^{-1/x}, & x > 0 \text{ の時}. \end{cases}$$

でしょう.（演習問題の [23] — まだ解かれていない —も本質的に同じ関数です.）この関数について証明すべきことは，次の 3 つです．

(A) 何回でも微分できる．

(B) すべての実数 a に対して，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ の収束半径が正である．

(C) 実解析的ではない．

まず，(A) からいきます．$x = 0$ だけが問題で，ほかの点で何回でも微分できることは明らかです．それには，数学的帰納法で,「$x > 0$ の時，$f^{(n)}(x)$ は，P_n を適当な多項式として $P_n(1/x)e^{-1/x}$ の形になる」ということを示して，$f^{(n)}(0) = 0$ を導きます.（詳しくは省略します．この種のことをきちんとやるのが演習の [23] です.）

次に (B) ですが，$a < 0$ の時は明らかです．$a > 0$ の時は，$e^{-1/x}$ が $(0, \infty)$ で実解析的であることが示せるので大丈夫です.（収束半径は a になります．もっとも「$e^{-1/x}$ が $(0, \infty)$ で実解析的である」こともちゃんと証明を書くとかなり大変です．ここでは省略します．演習問題 [76] も関連しています.）そして $a = 0$ の時は，上のことより $f^{(n)}(0) = 0$ なのでべき級数の係数はすべて 0 になり，明らかに収束半径無限大となります．

そして最後に，(C) ですが，もし実解析的ならば，0 を含むある開区間で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

とならなければなりませんが，$x > 0$ では $f(x) > 0$ ですから，このようなことはありえません．以上で，反例の構成ができました．

誤答で多かったのは次のような論法でした．

$x = a$ の回りでの Taylor 展開を有限項でとめて，剰余項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ を調べます．これが $n \to \infty$ の時，0 に収束することを示そうとするのですが，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ の収束半径が正であることから，十分 a に近い c に対して $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \to 0$ と結論するものです．

しかし，これは誤りで，このような論法で言えていることは十分 a に近い b に対し，$\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \to 0$ ということだけです．

・中間テスト

配点は，1 番から順に 30 点（各小問 10 点），40 点，30 点です．

[1] $c = 1$ の場合が授業でやったものです．

(1) は計算するだけで，答は

$$\log c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nc^n}(x-c)^n$$

です．

(2) Cauchy-Hadamard の公式より収束半径は c です．あるいは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)c^{n+1}}{nc^n} = c$ というほうの公式を使ってもできます．

(3) $\log x$ は実解析的で，またべき級数も収束半径内で実解析関数を定めるので，授業でやった定理より，等式は $(0, 2c)$ で成り立ちます．収束半径が c であることより，これより広い開区間ではダメなのでこれが答です．

[2] 授業でやった

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx$$

とおいたときの漸化式は

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

でした．これより答は,

$$\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan x + C$$

(Cは積分定数) です．

また，$x = \tan t$ と置換してもできます．

[3] $0 \le c < 1$ となる任意の実数 c に対し，閉区間 $[0, c]$ で，べき級数 $1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$ は，$\dfrac{1}{1+x^2}$ に一様収束しています．よってこの区間で項別積分して，

$$\arctan c = c - \frac{c^3}{3} + \frac{c^5}{5} - \frac{c^7}{7} + \frac{c^9}{9} - \cdots$$

を得ます．$-1 < c \le 0$ の場合も同様であす．

単に「べき級数だから項別積分してよい」という説明でも O.K. ですが，その場合収束半径のことも一言触れてください.（そうしないと，なぜ問題で$-1 < x < 1$ という制限がついているのかわからなくなってしまいます.）

何の根拠も書かずにいきなり項別積分したものはかなりの減点を免れません．