数学ＩＡ (理科Ｉ類 17,18,27,28 組) 中間テスト解説

1994 年 11 月 21 日　河東泰之

配点は，1 番から順に 40 点，30 点，30 点です．平均点は，69.7 点，得点分布は次のとおりでした．1 番，2 番はよくできていましたが，3 番はできていませんでした．

0–19 (点)	20–39	40–59	60–79	80–99	100
1(人)	5	1	11	7	6

[1] $t = e^x$ と置換すれば,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{t}{t+1/t}\,dt \\ &= \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= e^x - \arctan e^x + C,\end{aligned}$$

(Cは積分定数）となります．

[2] $x = \sin^2 t$, $(0 \le t \le pi/2)$, と置換すれば,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0,\varepsilon'\downarrow 0}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \\ &= 2\lim_{\varepsilon\downarrow 0,\varepsilon'\downarrow 0}\int_{\arcsin\sqrt{\varepsilon}}^{\arcsin\sqrt{1-\varepsilon'}} dt \\ &= \pi.\end{aligned}$$

となります．

[3] これは，わざと問題が紛らわしいように書いてある点もあり，何を証明すべきかわかっていない答案が大半でした．もう一度，何が聞かれているのかをはっきり書きます．

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とすると，もちろん普通の意味で積分することができます．一方，わざと点 b における値を忘れて，$f(x)$ が区間 $[a,b)$ 上でだけ定義されていると考えると，広義積分を考えることができます．この両者は同じ記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書くことになっているので，両者に食い違いがあると困ってしまいます．そのような困ったことは起こらないと期待されますが，本当に起こらないということを証明するのがこの問題の質問です．

さてそこで，$x \in [a,b]$ に対し，$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおきます.（ただし，$x = b$ の時，この積分の意味は通常の連続関数の閉区間における定積分 — 問題における後者の定積分 — です.）

一方，広義積分の方は，定義によって

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(t)\ dt = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(b-\varepsilon)$$

なので，結局証明すべき式は，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(b-\varepsilon) = F(b)$ となります．すなわち，$F(x)$ が点 b で，（左からの極限について）連続であることを証明することになります.

関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続なので，授業でやったとおり，原始関数 $F(x)$ は微分可能関数となり，特に $[a,b]$ で連続となって O.K. です.

また，直接 $F(x)$ の連続性を示そうとすれば,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|F(b)-F(b-\varepsilon)| &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left|\int_{b-\varepsilon}^{b} f(t)\ dt\right| \\
&\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{b-\varepsilon}^{b} |f(t)|\ dt \\
&\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\varepsilon \max_{t\in[a,b]}|f(t)|) \\
&= 0
\end{aligned}$$

とすることもできます.（連続関数 $|f(x)|$ は，閉区間 $[a,b]$ で最大値を取るので，$\displaystyle\max_{t\in[a,b]}|f(t)| < \infty$ であることに注意します.）