数学 I A 中間テスト (その 2) 略解・解説

河東泰之

配点は下記の通りで，合計 110 点です．100 点を越えた場合は 100 点で頭打ちです．平均点は，51.9 点，得点分布は次のとおりです．

0–19 (点)	20–39	40–59	60–79	89-99	100
3 (人)	10	10	8	3	2

[1] （20 点）$z = 0$ は明らかに解ではないので，$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)$ とおいて，$z^n = r^n e^{in\theta} = 1$ とすれば，$r = 1, \theta = 0, 2\pi/n, 4\pi/n, \dots, 2(n-1)\pi/n$ となるので，答えは $z = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n$, $\cos 4\pi/n + i \sin 4\pi/n$, $\dots$, $\cos 2(n-1)\pi/n + i \sin 2(n-1)\pi/n$ の n 個です．

また，この n 個が解であることを直接計算し，n 次方程式にはたかだか n 個の解しかないこと（因数定理からわかる）を使っても O.K. です．

[2] （30 点）(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ より，収束半径は 1 です．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ なので，収束半径は 0 です．

(3)

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{となる } m \text{ がある時,} \\ 0, & \text{その他の時.} \end{cases}$$

なので，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$ となり，収束半径は 1 です．

[3] （30 点） まず切り捨てによって，すでに $0.0000003333\dots$ の誤差が生じていることに注意します．

Taylor 展開の剰余項を直接計算すると，$(\cos c)x^5/5!$, $(0 < c < x)$ となります.（問題の式は 3 次まででですが，sin の Taylor 展開の 4 次の項は 0 なので，4 次までであると思って 5 次の剰余項を考えます.）$0 < \cos c < 1$ ですから，この値は$\frac{(0.1)^5}{5!} = 0.00000008333\cdots$ 以下です．これと最初の切り捨て誤差を合わせて，誤差の合計は $0.000000416666\cdots < 4.17 \times 10^{-7}$以下となります．

一方，直接 Taylor 展開の続きの項（無限個）を評価しても，誤差は，$x = 0.1$ として，

$$\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots < \frac{x^5}{5!} = 0.00000008333\cdots$$

なので，最初の切り捨ての分と合わせてと合わせてやはり，4.17×10^{-7}以下となります．

Taylor 展開の剰余項を直接計算する時，4 次の剰余項を使ってしまうと $(\sin c)x^4/4!$, $(0 < c < 0.1)$ となります．ここで，$0 < \sin c < c < 0.1$ を使うと，これは $4.1666\cdots \times 10^{-7}$とな

ります．これと最初の切り捨て誤差を合わせて，誤差の合計は 7.5×10^{-7}になります．これは上の答えより精度が悪いので，3 点減点します．またこの方法で，単に $\sin c < 1$ としてしまうと，さらに一桁精度が下がって，4.5×10^{-6} となります．これは 6 点減点にしました．

なお，コンピュータで計算すると，$\sin 0.1 = 0.0998334166468281\ldots$です．

[4] （30 点）正の数 Mを，すべての実数 x に対して $|f'(x)| < M$となるように取ります．任意に与えられた正数εに対し，$\delta = \varepsilon/M$とおきます．実数 x, x'に対し，$0 < |x - x'| < \delta$であれば平均値の定理より，x と x'の間に x''が存在して

$$\left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| = |f'(x'')| < M$$

となるので，$|f(x) - f(x')| < M\delta = \varepsilon$を得ます．これは，すなわち一様連続性を示しています．