

[1] $z^n=1$ となる複素数 z をすべて求めよ。(本当にそれで全部であることをきちんと説明すること。) ただし, n は自然数である。

[2] 次のそれぞれのべき級数について収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$$

[3] $\sin 0.1$ を近似計算するため, $x - x^3/6$ に $x = 0.1$ を代入し, 切り捨てて 0.099833 という近似的な答えを得た。この計算の誤差を上から評価したい。 $|\sin 0.1 - 0.099833| \leq \alpha$ となる正の実数 α となるべく小さいものを有限小数の形 (1.23×10^{-4} といった形) で求めよ (“本当の” α は無限小数なので, 正確な α を求めることはもちろんできない。授業でやった程度の理論で得られるような α を求めればそれで満点である。さらに特別な工夫でよりよい値を得た場合にはボーナス点を与えることもある。)

[4] $(-\infty, \infty)$ 上の実数値微分可能関数 $f(x)$ に対し, $f'(x)$ が有界であるとする。この時, $f(x)$ は, $(-\infty, \infty)$ 上で一様連続であることを証明せよ (ただし, 関数が有界とはその関数の値の集合が有界であることである。)