

2008 年度数学 I 演習小テスト (3) 解説

2008 年 6 月 2 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 20 点, [2] 10 点, [3] 20 点, [4] 10 点 × 3, [5] 20 点です. 最高点は 100 点 (18 人), 平均点は 72.3 点でした.

[1] 定義を書き換えて

$$b_n = \frac{((2n+2)!!)^2}{4(n+1)((2n+1)!!)^2}$$

としたあと Wallis の公式を使うと $\pi/4$ を得ます.

[2] 普通に不定積分から求めて, 極限を考えればできます. 答えは $\alpha > 1$ です.

[3] e の肩を書き換えて

$$ax^2 + bx + c = -\left(\sqrt{-ax} + \frac{-b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

と書いて, 右辺第 1 項から生じる積分については $\sqrt{-ax} + \frac{-b}{2\sqrt{-a}} = t$ という置換を行います. これより答えは $\sqrt{-\pi/ae^{(4ac-b^2)/4a}}$ です.

[4] いずれもロピタルの定理で普通にできます. 答えは, (1) $1/3$, (2) $1/6$, (3) $1/4$ です.

[5] x^4 をかけることにより, $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a - bx - cx^2 - dx^3) = 0$ でなくてはなりません. これより, $a = 1$ です. 次に, x^3 をかけることにより, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a - bx - cx^2 - dx^3}{x} = 0$ でなくてはなりません. これより, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = b$ となり, $b = 1$ がわかります. 以下同様に続けて, $c = 1/2$, $d = 1/6$ となります. また, a, b, c, d がこれらの値を取るとき, 問題の極限は存在して $1/24$ となります.