

2008 年度数学 I 演習小テスト (2) 解説

2008 年 5 月 8 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

配点は各小問 10 点ずつです。最高点は 100 点 (3 人), 平均点は 69.2 点でした。以下簡単に解説します。(これは「模範解答」ではありません。必要なものについては授業中にもっと詳しく解説します。)

- [1] (1) ある正の実数 x, y に対し, $(x + y)/2 < \sqrt{xy}$ が成り立つ。
(2) 3 以上の自然数 n と, 自然数 x, y, z で $x^n + y^n = z^n$ を満たすものが存在する。
(3) ある有理数 p, q であって, $p \neq q$ であるが, どのような有理数 r についても $p < r < q$ とならないようなものが存在する。
元の命題の真偽は聞いていませんが, (1) が真, (2) は自然数を 1 以上として真, (3) は偽です。

- [2] (1) 正しい。 x は正なので $y = \log x$ とおけばよい。
(2) 正しい。十分大きい x と十分小さい x で, $x^3 + ax^2 + bx + c$ の符号が違うので中間値の定理が使える。
(3) 正しい。たとえば $c = |a| + |b|$ とおけばよい。

- [3] (1) いくらでも例はありますが, たとえば $A = \mathbf{R}$ とすれば O.K. です。
(2) a が上界ならば, $a + 1$ も上界なので, そのようなことはありません。
(3) $\forall x \in A$ の部分が常に不成立なのでどのような実数 a もすべて上界の条件を満たしています。

[4] このようなものは高校まではどこでもきちんと定義されていない, ということを知ってほしいということで, 出したものです。「2 を $\sqrt{2}$ 回かけたもの」というのは定義とはいえません。「 $\log_2 x = \sqrt{2}$ となるような x のこと」というのは先に $\log_2 x$ が定義されていなくては意味がありません。 p, q が自然数のときは, $2^{q/p}$ は「 2^q の p 乗根」として定義されているので, $\sqrt{2} = 1.4142 \dots$ と書いて「 $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \dots$ の極限」というのが一応正しい答えですが, なぜこの極限が存在するのか, また, $\sqrt{2}$ に近づくほかの有理数列をとっても同じものに収束するのか, は高校まででは示されていません。