2008年度数学I演習小テスト (1) 解説

2008年5月8日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

配点は各小問10点ずつです．最高点は100点 (5人)，平均点は63.2点でした．以下簡単に解説します．(これは「模範解答」ではありません．必要なものについては授業中にもっと詳しく解説します．)

[1] (1) どうやってもできますが，きちんとわかってほしいことは左辺の意味は $\lim_{n\to\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{個}}$ であるということです．

(2) 「弧長や面積をきれいに表せるから」というのは間違ってはいませんが，弱い理由です.「$\sin x$ の微分は $\cos x$ 」というのはラジアンだからこそ成り立つことです．さらにこれから Taylor 展開を学べば，ラジアンが「自然な測り方」であることがはっきりわかります.

(3) $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ を $\dfrac{\sin((x+h/2)+h/2)-\sin((x+h/2)-h/2)}{h}$ と書いたあと，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ を使います.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ あるいは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ または,「$y=a^x$ の $x=0$ における接線の傾きが1になるような a」,「$\displaystyle\int_1^a\frac{1}{x}\,dx=1$ となる a」などいろいろあります.

[2] (1) a,b,x,y を実数として，$\alpha=a+bi, z=x+iy$ とおけば，$x^2-y^2=a, 2xy=b$ を解くことになります.「a,b のどちらも0でない場合」と「a,b の片方が0である場合」についてグラフを描いて考えればわかります.

(2) 平方完成による通常の解の公式の導出を見れば，係数が複素数でもそのまま成り立つことがわかります.

[3] $(1+1)^n$ に2項定理を使うと，$n\geq 4$ のとき，$2^n\geq n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ がわかります．これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ がわかります.

$n\geq 3$ のとき，$2^n/n!\leq 2(2/3)^{n-2}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=0$ がわかります.

$x_n=\dfrac{c_n}{d_n}$ とおくと，2項定理より $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$ となります．これより，$x_n\leq x_1/2^{n-1}$ となって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=0$ がわかります.

[4] どの本にでも出ているので省略します.