2008 年度数学 I 期末テスト解説

2009 年 2 月 17 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に，20, 20, 20, 20, 30 点の 110 点満点です．さらに，演習の成績が順当な人にはプラス 6 点をつけ，50 点にぎりぎり不足していて演習成績が順当な人には 50 点をつけました．この点数 (100 点で頭打ち) が赤で答案の上に書いてあります．たとえば $63+6$ というのは，試験の成績が 63 点で演習分のプラスがついて，69 点になったという意味です．この平均点は 66.8 点，最高点は 100 点 (6 人) でした．返却する答案はコピーがとってあります．この点数の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
15 (人)	22	13	23	17	9	6

演習の成績は次のようにつけました．演習 7 回のうち一番悪い 1 回分を除いた残りの平均点を x 点として，$0.99x$ を四捨五入したものを成績とします．(欠席の回は 0 点とします．) 前半の問題が易しく，点が高めになったため，0.99 をかけることにしましたが，期末試験の成績が特に良い人についてはこの 0.99 をかけるのをやめにしてあります．また，これによって 45 点以上 50 点未満の人は 50 点としました．それ以外の 45 点未満の人は，期末試験の結果と合わせて総合的に判断した結果，1 人を 50 点にしました．これによって演習の総合点の平均点は 73.0 点，最高点は 99 点 (1 人) となります．この点数が答案上部に青で書いてあります．この点数分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
3 (人)	16	15	35	25	12	0

以下，各問の解説です．

[1] (1) $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ で x に x^3 および $-x^3$ を代入したものの差をとれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{6n-3}}{2n-1}$ を得る．Taylor 展開の一般論よりこれが求める Taylor 展開である．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{6n}}{2n-1}$ の収束半径を求めればよい．ここで $x^6=t$ とおいて D'Alambert の公式をつかえば $(2n+1)/(2n-1)\to 1$ より t の整級数としての収束半径は 1 である．$x^6=t$ より，もとの整級数の収束半径も 1 である．

[2] $x=(r\cos\theta)/a$, $y=(r\sin\theta)/b$ とおくと，D は $\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi\}$ に変換される．Jacobi 行列は，$\begin{pmatrix}\frac{\cos\theta}{a} & \frac{-r\sin\theta}{a}\\ \frac{\sin\theta}{b} & \frac{r\cos\theta}{b}\end{pmatrix}$ なので，Jacobian は $r/(ab)$ となり，変数変換の規則は $dx\,dy=\dfrac{r}{ab}\,dr\,d\theta$ となる．これより，問題の重積分は

$$\frac{1}{ab}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\,dr\,d\theta$$

となる．この値を計算すると $\dfrac{\pi}{4ab}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$ となる．

[3] (1) $\left|\dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ であり，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$ は広義積分可能である．よって，$f(t)$ も広義積分可能である．

(2) 積分の中味を t で微分すると，$\dfrac{-x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}$ となる．$0<\alpha<t<\beta$ のとき，$\left|\dfrac{-x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}\right| \leq e^{-\alpha x^2}$ であり，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ は $\alpha>0$ より広義積分可能である．これより，積分記号下での微分が，$0<\alpha<t<\beta$ で許される．α,β は任意なので，任意の t で $f(t)$ は微分可能である．

(3) (2) より，$f'(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-x^2e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$ である．よって，

$$\sqrt{t}(f(t)-f'(t))=\sqrt{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tx^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

を得る．二番目の等号は $\sqrt{t}x$ を x と置き直した置換積分による．

[4] (解答例) $f(x,y)=\cos x+\cos y$ とおく．$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\sin y$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ となる点は $(n\pi,m\pi)$, (n,m は整数), であり確かに無限個ある．また，このとき Hesse 行列は $\begin{pmatrix}-\cos x & 0\\ 0 & -\cos y\end{pmatrix}$ になる．この行列式は，$\cos x\cos y$ であるから，(n,m) の偶奇が，偶数，偶数のとき $f(x,y)$ は極大値，偶数，奇数のとき $f(x,y)$ は鞍点，奇数，偶数のとき $f(x,y)$ は鞍点，奇数，奇数のとき $f(x,y)$ は極小値となる．いずれも無限回とることは明らかである．

[5] (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-3x+3y^2$ より，これが共に 0 となる点は，$(0,0),(1,1)$ である．Hesse 行列は $\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}$ であり，$(x,y)=(0,0)$ ではこの行列式は負，$(x,y)=(1,1)$ では正である．よって前者は鞍点，後者は極値となる．$(x,y)=(1,1)$ では Hesse 行列の 1 行 1 列成分が正なので極小値を取る．よって答えは，$f(1,1)=-1$ が極小値である．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y(3x^2+y^2-1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x(x^2+3y^2-1)$ より，これが共に 0 となる点は，$(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(\pm1/2,\pm1/2)$ である．(複号は任意の組み合わせを取る．) また Hesse 行列は $\begin{pmatrix}6xy & 3x^2+3y^2-1\\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy\end{pmatrix}$ である．$(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$ ではこの行列式は負になるのでこれらの点は鞍点である．$(1/2,1/2)$, $(1/2,-1/2)$, $(-1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$ では行列式が正となり，Hesse 行列の 1 行 1 列成分は順に正，負，負，正となるので，これらは順に，極小値，極大値，極大値，極小値となる．よって答えは，$f(1/2,1/2)=f(-1/2,-1/2)=-1/8$ が極小値，$f(1/2,-1/2)=f(-1/2,1/2)=1/8$ が極大値である．