2008 年度数学 I 演習小テスト (13) 解答解説

2009 年 2 月 6 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 10 点，[2] 30 点，[3] 30 点，[4] 30 点 です．平均点は 57.8 点，最高点は 100 点 (7 人) でした．

この演習の成績は次のようにつけます．演習 7 回のうち一番悪い 1 回分を除いた残りの平均点を x 点として，$0.99x$ を四捨五入したものを成績とします．(欠席の回は 0 点とします．) 前半の問題が易しく，点が高めになったため，0.99 をかけることにしました．また，これによって 45 点以上 50 点未満の人は 50 点とします．0 点の人は不可です．それ以外の 45 点未満の人は，期末試験の結果と合わせて総合的に判断します．

これによって総合点の平均点は 72.7 点，最高点は 98 点 (1 人) となります．この点数分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
4 (人)	15	15	35	25	12	0

今回の解答例を下につけます．

[1] ある $a>0$ が存在して，どのような $b>0$ に対しても，ある実数 x で，$x>b$ かつ $x\le a^2$ となるものが存在する．

特別に惜しいもの以外は部分点はありません．

[2] $x>0$ として，Taylor 展開により，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + (\cos a)\frac{x^5}{120}, \quad 0<a<x,$$

と

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + (\cos b)\frac{x^4}{24}, \quad 0<b<x,$$

を得る．$x=0.1$ として，第 1 式より，

$$0.09983 < \sin 0.1 < 0.099835,$$

であり，第 2 式より

$$0.995 < \cos 0.1 < 0.995005$$

であるから，

$$0.10033 < \tan 0.1 < 0.10034$$

より，答えは 0.1003 である．

いきなり，$\tan x$ を Taylor 展開してももちろんできます．採点基準は，きちんと誤差を上から押さえて満点，雑な評価で正しい答えになったものは 20 点，正しい方針だが雑な評価で答えも少し違うものは 10 点です．

[3] $s = xy,\ t = y/x^2$ とおくと，$x = s^{1/3}t^{-1/3},\ y = s^{2/3}t^{1/3}$ より，Jacobi 行列は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} s^{-2/3}t^{-1/3} & -s^{1/3}t^{-4/3} \\ 2s^{-1/3}t^{1/3} & s^{2/3}t^{-2/3} \end{pmatrix}$$

となり，Jacobian は $\dfrac{1}{3t}$ となる．これより，$dx\ dy = \dfrac{ds\ dt}{3t}$ と書けるので，問題の重積分の値は

$$\frac{1}{3}\int_c^d \int_a^b s\ ds\ dt = \frac{(b^2 - a^2)(d - c)}{6}$$

となる．

[4] 普通に極座標に変換して，$dx\ dy = r\ dr\ d\theta$ を用いて，問題の重積分の値は

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b r^3 \cos\theta \sin\theta\ dr\ d\theta = \frac{(b^4 - a^4)(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)}{16}$$

となる．