2008 年度数学 I 演習小テスト (12) 解答解説

2009 年 1 月 26 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 10 点 ×2，[2] 25 点，[3] 25 点，[4] 20 点 です．平均点は 56.4 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．解答例を下につけます．

[1] (1) x, y で f を偏微分して 0 とおくと，$10x + 4y = 0, 4x + 14y = 0$ を得る．これを解くと，解は $x = y = 0$ だけである．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 14$ なので，$x = y = 0$ における Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ となる．この行列式は正であり，1 行 1 列成分も正なので，$x = y = 0$ では，極小値 $f(0, 0) = 0$ を取る．これが極値のすべてである．

(2) x, y で $f(x, y)$ を偏微分して 0 とおくと，$y - 2xy - y^2 = 0$, $x - x^2 - 2xy = 0$ を得る．これを解くと，解は $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1/3, 1/3)$ である．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$ なので，$(x, y) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1/3, 1/3)$ における Hesse 行列はそれぞれ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix},$$

となる．最初の 3 つの行列式は負であるので，これらの点では極値を取らない．最後のものは行列式が正であり，1 行 1 列成分が負なので，$x = y = 1/3$ では，極大値 $f(1/3, 1/3) = 1/27$ を取る．これが極値のすべてである．

(3) x, y で f を偏微分して 0 とおくと，$y - 1/x^2 = 0, x - 1/y^2 = 0$ を得る．これを解くと，解は $x = y = 1$ だけである．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2/x^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2/y^3$ なので，$x = y = 1$ における Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる．この行列式は正であり，1 行 1 列成分も正なので，$x = y = 1$ では，極小値 $f(1, 1) = 3$ を取る．これが極値のすべてである．

[2] まず，y を与えて x の 2 次方程式と思うと，判別式は正であり，解は常に 2 つあることがわかる．これより x を y の関数と見ると，この図形は 2 つのグラフからなる．$|y|$ はいくらでも大きくなれるので，$x^2 + y^2$ のとりうる値は $[\alpha, \infty)$ の形である．この α を求めるため，Lagrange の未定乗数法を用いる．$F(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 1$ とおき，$f(x, y) - \lambda F(x, y)$ を，x, y, λ で偏微分して 0 とおくと，$2x - \lambda(2x + y) = 0$, $2y - \lambda(x - 2y) = 0$, $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ となる．($\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = 0$ となる点は，$x = y = 0$ だけで，この点は $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ の上にないので，Lagrange の未定乗数法で極値の候補がすべて求まる．) $\lambda \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$ はすぐにわかるの

で，最初の 2 式より，$2/\lambda$ は，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値である．よって，$\lambda = \pm 2/\sqrt{5}$ を得る．$\lambda = -2/\sqrt{5}$ のケースは，$x = -t$, $y = (2+\sqrt{5})t$ の形になるが，これでは，$x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ を満たさない．$\lambda = 2/\sqrt{5}$ のケースは，$x = t$, $y = (-2+\sqrt{5})t$ の形になり，$x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ と合わせて $t^2 = (2+\sqrt{5})/5$ より，x, y が求まる．極値の候補はこのケースだけなので，このときの $x^2 + y^2$ が極小値である．この値が上の α であり，$2\sqrt{5}/5$ と求まる．よって，答えは $[2\sqrt{5}/5, \infty)$ である．

[3] 条件より，$|x|, |y| \leq 1$ が従うので，有界集合となる．よって，Lagarange の未定乗数法で求まる極値の候補の中に，最大値，最小値がある．$F(x,y) = x^2 + x^4 + y^2 + y^4 - 1$ とおき，$f(x,y) - \lambda F(x,y)$ を，x, y, λ で偏微分して 0 とおくと，$y - \lambda(2x + 4x^3) = 0$, $x - \lambda(2y + 4y^3) = 0$, $x^2 + x^4 + y^2 + y^4 - 1 = 0$ となる．($\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = 0$ となる点は，$x = y = 0$ だけで，この点は $x^2 + x^4 + y^2 + y^4 - 1 = 0$ の上にないので，Lagrange の未定乗数法で極値の候補がすべて求まる．) $\lambda \neq 0$ はすぐにわかり，$2x^2 + 4x^4 = 2y^2 + 4y^4$ である．$g(x) = 2x^2 + 4x^4$ のグラフを考えることにより，$y = \pm x$ がわかる．$x^2 + x^4 + y^2 + y^4 - 1 = 0$ より，x^2 について解くと，$x^2 = (-1 \pm \sqrt{3})/2$ を得る．もちろん $x^2 \geq 0$ なので，$x^2 = y^2 = (-1+\sqrt{3})/2$ である．これより，xy の極値の候補は $(-1+\sqrt{3})/2$ と $(1-\sqrt{3})/2$ の 2 つなので，これらが最大値，最小値である．

[4] もちろん答えはいくらでもありうるが，たとえば次のようにおけばよい．

$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 - 3y^2$ とする．もちろんこれは C^∞-関数である．このとき，極値を求めるため，x, y で f を偏微分して 0 とおくと，$6x^2 - 6x = 0$, $6y^2 - 6y = 0$ を得る．これを解くと，解は $(x,y) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ である．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 6$ なので，$(x,y) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ における Hesse 行列はそれぞれ，$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, となる．2 番目と 3 番目の行列式は負であるので，これらの点では極値を取らない．1 番目と 4 番目の行列の行列式は正であり，1 行 1 列成分がそれぞれ負と正なので，$(x,y) = (0,0)$ では極大値を取り，$(x,y) = (1,1)$ では極小値を取る．これが極値のすべてであるので，この $f(x,y)$ は問題の条件を満たしている．