

2008 年度数学 I 演習小テスト (1)

2008 年 4 月 17 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは、ノート、本、コピーなどすべて持ち込み可で行います。途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。

- [1] (1) $0.999\cdots = 1$ であることを示せ。
(2) 角度を測るのにラジアンという単位を使う利点は何か。説明せよ。
(3) $\sin x$ の微分は $\cos x$ であることを示せ。
(4) 自然対数の底 e とはどのような数か。定義を述べよ。(いくつか定義の仕方があるが、どれでも一つ述べればよい。)

[2] (1) α を 0 でない複素数とする。 $z^2 = \alpha$ となる複素数 z はちょうど 2 個存在することを示せ。

この二つの z をあわせて $\pm\sqrt{\alpha}$ と表すことにする。また、 $\alpha = 0$ のとき、 $\pm\sqrt{\alpha}$ は 0 を表すとする。

(2) α, β, γ を複素数とし、 α は 0 でないとする。複素数 z についての 2 次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ の解は通常公式 $z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ で表されることを示せ。

[3] $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、数列 a_n, b_n, c_n, d_n を次のように定める。

$$a_n = n^3, \quad b_n = 2^n, \quad c_n = n!, \quad d_n = n^n.$$

このとき、次のそれぞれの極限を求めよ。理由をきちんと示すこと。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}.$$

[4] 平均値の定理を述べ、その証明の概略を述べよ。