2008年度数学I演習小テスト(10)解答解説

2008年12月15日
河東泰之(かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟323号室(電話5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は[1] 15点×3, [2] 10点×2, [3] 10点×2, [4] 15点です．平均点は55.3点, 最高点は100点(2人)でした．解答例を下につけます.

[1] (1) 求める積分は

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} xy\, dx\, dy$$

に等しい．内側の積分を実行すると $x[y^2/2]_0^{2-2x} = 2(x-2x^2+x^3)$ となるので，外側の積分をさらに実行すると答えは

$$2\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

である.

(2) x, y の積分の順序を入れ替えると，問題の積分は

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} y^2\, dy\, dx$$

となる．内側の積分を実行すると．$x^3 e^{x^2}/3$ となるので，外側の積分を実行すると，$x^2=t$ と置換することにより,

$$\int_0^1 \frac{x^3}{3} e^{x^2}\, dx = \frac{1}{6}\int_0^1 te^t\, dt$$

となる．さらに部分積分することにより，これは

$$\frac{1}{6}[te^t]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 e^t\, dt = \frac{e}{6}-\frac{e}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

に等しい.

(3) 問題の積分は

$$\int_0^1 \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dy\, dx$$

に等しい．内側の積分を実行すると,

$$2x\sqrt{1-x} = 2((1-x)^{1/2}-(1-x)^{3/2})$$

に等しいので，外側の積分を実行すると,

$$2\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

が答えである．

[2] (1) 問題の積分は

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dy\ dx}{(x+y)^{3/2}}$$

に等しい．内側の積分を実行すると，

$$\left[-2(x+y)^{-1/2}\right]_0^{1-x} = -2 + 2x^{-1/2}$$

である．さらに外側の積分を実行すると，

$$\int_0^1 (-2 + 2x^{-1/2})\ dx = [-2x + 4x^{1/2}]_0^1 = 2$$

に等しく，これが答えである．

(2) 問題の積分は

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{dx\ dy}{\sqrt{y-x}}$$

に等しい．内側の積分を実行すると，

$$\left[-2(y-x)^{1/2}\right]_0^y = 2y^{1/2}$$

である．さらに外側の積分を実行すると，

$$\int_0^1 2y^{1/2}\ dy = \left[\frac{4}{3}y^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

である．

[3] (1) 極座標を使うと，問題の積分は

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r\ dr\ d\theta}{r^{2\alpha}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}$$

となるので，答えは $2\alpha - 1 < 1$, すなわち $\alpha < 1$ である．

(2) 極座標を使うと，問題の積分は

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{r^3 \cos^2\theta\ dr\ d\theta}{r^{2\alpha}} = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2\alpha-3}}$$

である．$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta$ はゼロでない実数なので，答えは $2\alpha - 3 > 1$, すなわち $\alpha > 2$ である．

[4] 問題の式を $n!$ で割ったものが，$n+1$ 回微分すると e^x に等しく，かつ n 階以下の微分がすべて $x = 0$ で 0 となる関数である．この関数はすなわち

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

なので，求める答えは

$$n! \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$$

である．