2008 年度数学 I 演習小テスト (9) 解答解説

2008 年 11 月 17 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 15 点 ×3, [2] 15 点 ×3, [3] 10 点です．平均点は 78.8 点，最高点は 100 点 (12 人) でした．解答例は次のとおりです．

[1] (1)

$$\begin{aligned}\int_t^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}}\,dx &= \int_t^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\,dx \\ &= [2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}]_t^1 \\ &= 2 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{t} + 2\sqrt{t+1}\end{aligned}$$

において，$t \to 0$ とすればよいので答えは $4 - 2\sqrt{2}$ である．

(2)

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{5/2}\,dx = \Gamma(7/2) = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}\Gamma(1/2) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

である．

(3) 部分積分により，

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-x}\cos 2x\,dx &= [-e^{-x}\cos 2x]_0^t - 2\int_0^t e^{-x}\sin 2x\,dx \\ &= -e^{-t}\cos 2t + 1 - 2[-e^{-x}\sin 2x]_0^t - 4\int_0^t e^{-x}\cos 2x\,dx \\ &= -e^{-t}\cos 2t + 1 + 2e^{-t}\sin 2t - 4\int_0^t e^{-x}\cos 2x\,dx\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_0^t e^{-x}\cos 2x\,dx = (-e^{-t}\cos 2t + 1 + 2e^{-t}\sin 2t)/5$$

である．$t \to \infty$ として，答えは $1/5$ である．

[2] (1) $\alpha = 0$ のときは $e^{\alpha x} = 1$ なので明らかに問題の広義積分は存在しない．その他のときは，$\displaystyle\int_0^t e^{\alpha x}\,dx = [e^{\alpha x}/\alpha]_0^t$ なので，$\alpha > 0$ であれば，$t \to \infty$ の極限は存在せず，$\alpha < 0$ であれば，$t \to \infty$ の極限は存在する．よって答えは $\alpha < 0$ である．

(2) $\alpha > 1$ であれば，$t > 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx + \int_1^t \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx \\ &\le \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx + \int_1^t \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\,dx\end{aligned}$$

で，$2\alpha-1>1$ であるので，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\,dx$ が存在することを授業で示したことと，Weierstrass の M テストにより，問題の広義積分は存在する．

$\alpha \leq 1$ であれば，$t>1$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx &\geq \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx + \int_1^t \frac{x}{(2x^2)^\alpha}\,dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^\alpha}\,dx + \int_1^t \frac{1}{2^\alpha x^{2\alpha-1}}\,dx\end{aligned}$$

で，$t\to\infty$ のとき，$\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\,dx \to \infty$ であることより，問題の広義積分は存在しない．よって，答えは，$\alpha>1$ である．

(3) $\log x = y$ と置換積分することにより，

$$\int_2^t \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} = \int_{\log 2}^{\log t} \frac{dy}{y^\alpha}$$

である．$t\to\infty$ と $\log t\to\infty$ は同じことだから．授業でやったことより，この広義積分が存在する条件は $\alpha>1$ である．

[3] $x>0$ のとき，次のように $f(x)$ を定める．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x<1 \text{ のとき}, \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2 \text{ のとき}, \\ 0, & x>2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ は明らかに 0 以上の値を取る連続関数である．$x\geq 2$ ではこの関数は 0 なので，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_0^\infty f(x)^2\,dx$ を考えるには区間 $(0,1)$ で考えてよい．すると，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ は存在するが，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{x})^2}\,dx$ は存在しないので，確かに問題の条件を満たしている．

[2] (2) では，具体的に積分の値が求まるので計算してしまってもかまいません．