2008 年度数学 I 演習小テスト (8) 解答解説

2008 年 11 月 10 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は [1] 15 点 ×3, [2] (Taylor 展開 10 点 + 収束半径 5 点)×3, [3] 10 点です．平均点は 77 点，最高点は 100 点 (15 人) でした．解答例を下につけます．

[1] (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\frac{(n+1)^2+1}{n+1}=1$ より，ダランベールの公式により収束半径は 1 である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n}$ を求める．$\log n<\log(n+1)<\log(2n)=\log 2+\log n$ を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n}=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2n}{\log n}=1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ がわかるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n}=1$ である．よって，ダランベールの公式により収束半径は 1 である．

(3) $x\geq 0$ の場合をまず考えると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$ は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ の途中の項を飛ばしたもので，各項は 0 以上なので，$x<1$ であれば後者が収束することより，前者も収束する．よって，$x<0$ の場合も $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x^{n^2}|$ を考えることにより，$|x|<1$ で収束することがわかる．一方，$|x|>1$ であれば，$n\to\infty$ のとき $|x^{n^2}|\to\infty$ であるので，問題の無限級数は収束しない．以上のことより収束半径は 1 である．

[2] (1) 通常の 2 項定理より，$\displaystyle 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n(2n-3)!!}{2^n n!}x^n$ である．(ただし，$(-1)!!=1$ とした．) また，この収束半径は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-3)!!}{2^n n!}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{3^{n+1}(2n-1)!!}=\frac{1}{3}$$

より，ダランベールの公式によって 1/3 である．

(2) $\log(1+x)$ を Taylor 展開した無限級数で x の代わりに x^2 を代入したものが求めるものである．よって答えは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$ である．収束半径は，ダランベールの公式によって $\log(1+x)$ のときに 1 なので，こちらの Taylor 展開についても 1 である．

(3) $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ という Taylor 展開の両辺を 2 回微分すれば項別微分によって，$\displaystyle\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$ を得る．これより，$\displaystyle\frac{2}{(1+x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(-x)^n$

なので，両辺足して 2 で割れば， $\dfrac{1}{(1-x)^3}+\dfrac{1}{(1+x)^3}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+1)x^{2n}$ となる．$t=x^2$ として $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+1)t^n$ の収束半径をダランベールの公式で求めると 1 である．よって，今求めた Taylor 展開の収束半径も 1 である．

[3] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ とすればよい． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$ なので，ダランベールの公式より確かに収束半径は 1 である．また，$x=\pm 1$ のとき，絶対値をつけた無限級数は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ となるが，これが収束することはすでに前回小テスト示されているので，$x=\pm 1$ でも確かに収束する．