2008 年度数学 I 演習小テスト (7) 解説

2008 年 10 月 20 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は，[1] (1) 15 点 (2) 15 点 (3) 10 点，[2] (1) 15 点 (2) 15 点 (3) 15 点，[3] 15 点です．最高点は 100 点 (53 人)，平均点は 89.3 点でした．

解答例を示します．

[1] (1) $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2}$ を，$[1,2], [2,3], \dots, [n-1,n]$ の区間ごとに分け，それぞれの区間で $1/x^2$ を区間の右端の値で置き換えると，$1/x^2$ が減少関数であることより，積分の値は小さくなる．これによって，$\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$ が積分の値以下となる．両辺に 1 を加えて，問題の不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}$ を得る．

(2) (1) の不等式より，

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

となる．$\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ は単調増大なので，$n \to \infty$ のときこの和は収束する．

(3) (2) より，各項に絶対値をつけたものが収束しているので，10/6 の授業でやった定理より $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}$ も収束する．

[2] (1) $x \neq 2$ とすると，$\displaystyle\sum_{n=0}^k \frac{x^n}{2^n} = \frac{1-(x/2)^{k+1}}{1-x/2}$ である．よって，これは $|x/2| < 1$ のとき収束し，$|x/2| > 1$ のとき収束しない．したがって，収束半径は 2 である．

(2) これは $\sin x$ の Taylor 展開であり，すべての x について収束することがわかっている．よって収束半径は ∞ である．

(3) $x \ge 0$ とする．

$$\sum_{n=0}^k \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \sum_{n=0}^{2k+1} \frac{x^n}{n!} \le e^x$$

である．$\displaystyle\sum_{n=0}^k \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ は k について単調増大なので，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ は収束する． $x < 0$ のときは，

$$\sum_{n=0}^k \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^k -\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

なので，やはりこの無限級数も収束する．よって，すべての x についての収束がわかったので，収束半径は ∞ である．

[3] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^2x^n$ を考える．0 でないすべての x について，$n\to\infty$ のとき $(n!)^2x^n\to\infty$ であるので，この無限級数は収束しない．よって，この整級数の収束半径は 0 である．

(注意) [1] (1) で不等式に等号がついているのは，$n=1$ でも大丈夫なようにするためです.

[3] は他にもいくらでも例はあります．たとえば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^nx^n$ という答案も多くありました.