2008 年度数学 I 期末テスト解説

2008 年 9 月 5 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

配点は順に，25, 30, 30, 30, 30 点の 145 点満点です．平均点は 65.3 点，最高点は 100 点 (11 人) でした．この点数 (100 点で頭打ち) が赤で答案の上に書いてあります．ただし演習の成績がよかった人で，期末試験が悪かった場合は，プラスアルファがついています．これはすべて，50 点に少し足りないものを 50 点にしたケースです．たとえば，$45+5$ とは，もともと期末試験は 45 点だったが，このプラスアルファで 5 点ついて 50 点になったと言う意味です．返却する答案はコピーがとってあります．この点数の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
15 (人)	33	8	14	16	7	11

演習の成績は 7/14 に説明したものでは他の先生に比べ甘すぎることがわかりましたので，たいへんすみませんが，次のように変更します．演習 6 回のうち一番悪い 1 回分を除いた平均点を x とします．(欠席の回は 0 点とします．) $0.8x+21$ を四捨五入し，さらに 100 点を超えた場合は 100 点で頭打ちにしたものを成績とします．ただしこれによってぎりぎり 50 点を割る人できちんと出席していた 2 人は 50 点とします．これによって，平均点は 73.4 点，最高点は 100 点 (1 人)，不可なのは半分以上欠席の一人だけとなります．こちらの点数が青で答案の上に書いてあります．こちらについても期末試験成績によるプラスアルファを検討しましたが，当てはまる人はいませんでした．この点数の分布は次のとおりです．

0–49 (点)	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100
1 (人)	9	26	33	30	5	1

以下，各問の解説です．

[1] 答えは次のとおりです.「ある $\varepsilon>0$ が存在して，どのような $\delta>0$ に対しても実数 x, y で，$|x-y|<\delta$ だが $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$ となるものが存在する.」

できはよくありませんでした．授業でも言ったとおり，これがきちんとできないと数学の論理は何もわかりません．間違えた人は必ず，よく復習してください．

「どのような $\delta>0$ に対しても ⋯ であるような $\varepsilon>0$ が存在する」というのは，δ ごとに一つずつの ε があるのか，すべての δ に共通の ε があるのかよくわからないので認められません．

「ある $\varepsilon\leq 0\cdots$」になっている人が何人かいましたが，後ろについている >0 は ε の条件なのでこは否定に変わりません．

[2] e^x の Taylor 展開に，$x=1/4$ を代入します．$x=1/4$ として，ある $0<\theta<1$ に対し，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + e^{\theta x}\frac{x^4}{24}$$

となります．最初の 4 項の和はすぐ計算できて，$1.28385416666\cdots$ (6 が無限に続く) です．最後の項は正で，その値は $2^{10}>1000$ と $e^{\theta x}<2$ によって，$e^{\theta x}/6000<1/3000$ で上から抑えられます．よって，$e^{1/4}$ は，1.2838 以上，1.2842 以下ということになり，四捨五入した答えは 1.284 です．(正しい値は，$1.284025\cdots$ です．)

[3] 似た式を探すと，$(1+x)^{1/2}$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開は $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}x^n$ となっています．(ただし，$(-1)!!=1$ とします．) これと問題の式を比べると，偶数次の係数は合っていますが，奇数次の係数が問題では 0 となっていて食い違っています．奇数次の係数を消すには，$(1-x)^{1/2}$ と足して 2 で割ればいいので，$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})/2$ が答えの一つです．(他にも無限に答えはありますが,「自然」なものはこれだけです．)

これは一人しかできていませんでした.

[4] $\dfrac{e^{s^2+t^2-3s-3t}}{s^2+t^2+2s+2t+3}$ を s で偏微分して，$(s,t)=(0,0)$ としたときの値を a とおきます．式の形が対称なので，同じものを t で偏微分して，$(s,t)=(0,0)$ としたときの値も a です．すると，Jacobian を計算するために必要な 2×2-行列は，$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$ の形になります．この行列式を求めると答えは 1 です．実際は $a=-11/9$ で，すべての人がこの値を求めていて，間違っている人も何人かいましたが，これを計算する必要はありません.

[5] 1 回微分すると授業でやったとおり，

$$u'(t)\frac{\partial}{\partial x}f(u(t),v(t)) + v'(t)\frac{\partial}{\partial y}f(u(t),v(t))$$

です．これをもう 1 回微分すると，積の微分と，この公式をもう一度使って，答えは

$$\begin{aligned} &u''(t)\frac{\partial}{\partial x}f(u(t),v(t)) + v''(t)\frac{\partial}{\partial y}f(u(t),v(t)) + (u'(t))^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(u(t),v(t)) \\ &+2u'(t)v'(t)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(u(t),v(t)) + (v'(t))^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(u(t),v(t)) \end{aligned}$$

となります.

右辺のうち 2 項足りない人がたくさんいました．一般論がわかりにくければ，具体的に簡単な多項式を代入して考えてみることもできます．たとえば，$f(x,y)=x^2y$, $u(t)=t^2$, $v(t)=2t^2$ などです.