

2008 年度数学 I 期末テスト

2008 年 9 月 1 日

河東泰之 (かわひがしやすゆき)

数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)

e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは、ノート、本、コピーなどすべて持ち込み可で行います。途中の計算、説明などをきちんと書いてください。答案用紙は 1 枚両面です。それに収まるように書いてください。電卓等は使用禁止です。

[1] 実数上で定義された実数値関数 $f(x)$ についての次の命題を否定した命題を日本語で書け。 \forall, \exists などの記号は使わないこと。ただし、 \mathbf{R} は実数全体の集合を表す。

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

[2] $\sqrt{\sqrt{e}}$ を四捨五入で小数点以下 3 桁まで求めよ。(e は自然対数の底である。小数点以下 4 桁目を四捨五入して、3 桁までにすると言う意味である。答えの数値が正しいことの根拠をきちんと示すこと。)

[3] 开区間 $(-1, 1)$ で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで Taylor 展開したところ

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!!}{2^{2n}(2n)!} x^{2n}$$

となった。このような関数 $f(x)$ を一つ求めよ。(関数は一つ求めればよいが、それが本当に条件を満たしていることの根拠をきちんと示すこと。)

[4] 実数 s, t に対して定義された関数

$$\phi(s, t) = \sin s \cos t + \frac{e^{s^2+t^2-3s-3t}}{s^2 + t^2 + 2s + 2t + 3},$$

$$\psi(s, t) = \sin t \cos s - \frac{e^{s^2+t^2-3s-3t}}{s^2 + t^2 + 2s + 2t + 3},$$

を考える。これらの関数の $(s, t) = (0, 0)$ における Jacobian (ヤコビアン) を求めよ。

[5] $f(x, y), u(t), v(t)$ をいずれも C^∞ 級の関数とする。(関数はすべて実数値であり、 x, y, t は実数である。) このとき、 $f(u(t), v(t))$ を t で 2 回微分した関数を求めよ。