2008 年度数学 I 演習小テスト (6) 解説

2008 年 7 月 14 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

平均点は 44.5 点，最高点は 100 点 (2 人) でした．各問の解説をつけます．

この演習の成績は次のようにつけます．演習 6 回のうち一番悪い 1 回分を除いた平均点を x とします．(欠席の回は 0 点とします．) $0.7x+33$ を四捨五入し，さらに 100 点を超えた場合は 100 点で頭打ちにしたものを成績とします．これによって，平均点は 79.0 点，最高点 100 点 (1 人)，不可なのは半分以上欠席の一人だけとなります．また期末試験の成績が特によい場合はこれにプラスアルファがつきます．

期末試験の難度は今回の問題で 110 点満点にした程度のものを考えています．

[1] 各 10 点です．同じ意味であれば表現の仕方は違っていてもかまいません．

(1) ある $a>0$ とある $b>0$ に対しては，$Na>b$ となるような自然数 N は存在しない．

(2) ある実数 x とある自然数 n に対しては，$y^{2n+1}=x$ となるような実数 y は存在しない．

(3) ある $\varepsilon>0$ が存在して，どのような $\delta>0$ に対しても，x が存在して，$|x-a|<\delta$ だが $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ とはならない．

[2] 25 点です．$f(x)=\sin x^2$ とおき，

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m\dfrac{(4m+2)!}{(2m+1)!}, & n=4m+2,\ m\text{ は整数，と書けるとき，}\\ 0, & \text{その他のとき}\end{cases}$$

を示します．

まず，$f(x)$ は偶関数なので n が奇数のときは $f^{(n)}(0)=0$ です．$\sin x$ の Taylor 展開を $2n+1$ 次まで行ったものを剰余項付きで書いて，x に x^2 を代入すると，

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}\sin\theta x^2}{(2n+2)!}x^{4n+4}$$

となります．$|\sin\theta x^2|\le 1$ であることと，一般に f が無限回微分可能なとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-\cdots-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{x^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

であることより，目標の式が数学的帰納法で示されます．(上の極限の等式はロピタルの定理を繰り返し使うことにより示されます．)

以上より答えは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ となります．

$\sin x$ の Taylor 展開の x のところに x^2 を代入すれば

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

は出ますが，これではこの右辺が Taylor 展開であることは示されていません．これだけだと 15 点です.

[3] 25 点です．$y' = y^3$ を繰り返し使うことにより，数学的帰納法で

$$y^{(n)}(0) = (2n-1)!! \frac{1}{2^{(2n+1)/2}}$$

が示せます．これより，y の $x = 0$ での Taylor 展開は $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^n$ となります．ただしここで $(-1)!! = 1$ とします．Taylor 展開がこれに等しい関数として $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-x)^{-1/2}$ を得ます．ここまででは，これが本当に解であることは厳密には示されていませんが，そうであることは簡単にチェックできるので O.K. です. (解はこれだけですが，今はそれを示すことは要求されていません．)

あるいは，$y' = y^3$ より $\dfrac{-1}{2} y^{-2} = x + c$ であり $y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $c = -1$ となります．これより，$y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-x)^{-1/2}$ となります.

[4] 各 5 点です．$f(x) = \log(x^2 + y^2)$ に対し，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

となります.