2008 年度数学 I 演習小テスト (5) 解説

2008 年 7 月 14 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/`

平均点は 44.5 点，最高点は 85 点 (2 人) でした．各問の解説をつけます．

[1] 各 5 点です．$f(x) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2+4x^2-4y^2)e^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 8xye^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= -8xye^{x^2-y^2}\cos(2xy) + (-4x^2+4y^2-2)e^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (-2-4x^2+4y^2)e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 8xye^{x^2-y^2}\sin(2xy)
\end{aligned}
$$

となります．

[2] 25 点です．$\log(1+t(x+y))$ を t について Taylor 展開してから $t=1$ とおきます．

$$
\log(1+x+y) = x+y-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(x+y)^4}{4(1+\theta(x+y))^4},
$$

で，$0<\theta<1$ となります．

[3] 25 点です．$\displaystyle\int f(x,t)\,dt = F(x,t)$ なので，$\displaystyle\int_x^{2x} f(x,t)\,dt = F(x,2x)-F(x,x)$ となります．合成関数の微分公式よりこれを微分して $g(x,2x)+2f(x,2x)-g(x,x)-f(x,x)$ となります．

[4] (1) 5 点です．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と書くことにより，答えは $m+n\geq 3$ です．

(2) 10 点です．やはり極座標で書いて，

$$
r^{m+n-2}\cos^n\theta\sin^m\theta = Ar\cos\theta + Br\sin\theta + r\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta),
$$

の形で $\lim_{r\to 0}\varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$ になっている必要があります．(後の式で θ は一定でありません．) (1) より $m+n\geq 3$ でなくてはならないので，両辺を r で割って，$m+n=3$ では不可能なことがわかります．$m+n\geq 4$ のときは，$A=B=0$ がわかり，このときは，O.K. です．よって答えは $m+n\geq 4$ です．

(3) 5 点です．$f(x,0)$ だけを見て微分を考えることにより答えは $m \geq 1$ または，($n \geq 3$ かつ $m=0$) です．

(4) 10 点です．まず

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} 0, & m \geq 1 \text{ または } (n \geq 4 \text{ かつ } m = 0) \text{ の時}, \\ 1, & n = 3,\ m = 0 \text{ の時}, \\ \text{存在しない}, & \text{その他の時}, \end{cases}$$

であり，また $y \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} 0, & n \geq 2 \text{ または } n = 0 \text{ の時}, \\ y^{m-2}, & n = 1 \text{ の時}, \end{cases}$$

なので，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \begin{cases} \text{存在しない}, & (n \leq 3 \text{ かつ } m = 0) \text{ または } (n = 1 \text{ かつ } m \leq 2) \text{ の時}, \\ 1, & n = 1,\ m = 3 \text{ の時}, \\ 0, & \text{その他の時}, \end{cases}$$

となります．x と y および n と m を入れえても同様なので，答えは ($n \leq 1$ かつ $m \geq 4$) または ($m \leq 1$ かつ $n \geq 4$) または ($n \geq 2$ かつ $m \geq 2$) です．