2008 年度数学 I 演習小テスト (5)

2008 年 7 月 3 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

このテストは，ノート，本，コピーなどすべて持ち込み可で行います．途中の計算，説明などをきちんと書いてください．答案用紙は 1 枚両面です．それに収まるように書いてください．

氏名と学生証番号を答案の一番上に書いてください.

試験中に話をしているものは不正行為とみなして答案用紙を取り上げます.

[1] $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ とおく．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

[2] $\log(1+x+y)$ を $(x,y)=(0,0)$ の周りで 3 次の項まで Taylor 展開した式を剰余項付きで求めよ．

[3] $F(x,y)$ はすべての点で微分可能で，$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=g(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$, また $f(x,y)$, $g(x,y)$ はすべての点で連続とする．このとき，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{2x} f(x,t)\,dt$ を，f,g を使って表せ．

[4] m,n を 0 以上の整数とする．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき},\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ のとき},\end{cases}$$

とする．ただし，$0^0=1$ と定める．

(1) f が $(0,0)$ で連続となるための必要十分条件を m,n を使って表せ．

(2) f が $(0,0)$ で微分可能となるための必要十分条件を m,n を使って表せ．

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ が存在するための必要十分条件を m,n を使って表せ．

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ がともに存在して等しくなるための必要十分条件を m,n を使って表せ．