2013 年数学 I 期末テスト略解・解説

2013 年 9 月 10 日
河東泰之 (かわひがしやすゆき)
数理科学研究科棟 323 号室 (電話 5465-7078)
e-mail yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/

各問 20 点の 100 点満点です．あと少しで B, C の成績で，中間試験が良かった人にはプラスアルファの点がついています．その場合は $48+2=50$ のように一番上に書いてあります．点数がおかしいと思う人は直ちに申し出てください．答案はすべてコピーがとってあります．平均点は 65.2 点，最高点は 100 点 (4 人) で，成績分布は次の通りでした．

0–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100	合計
26(人)	33	20	23	23	17	4	146

以下簡単な計算は省略しますが，答案では計算もきちんと書く必要があります．

[1] これは超基本問題です．Taylor 展開の方が速いですがロピタルの定理を知っていれば高校生でもできます．計算は省略して答えだけを書きますが，これはとても簡単なので答えが違うものは即座に 0 点にしてあります．各 10 点です．
(1) 2/3.
(2) 81/4.

[2] $f(x)=\tan x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $f'''(x)=\dfrac{2(3\sin^2 x+\cos^2 x)}{\cos^4 x}$, $f''''(x)=\dfrac{8\sin x(2+\sin^2 x)}{\cos^5 x}$, $f'''''(x)=8\dfrac{2+11\sin^2 x+2\sin^4 x}{\cos^6 x}$ なので，Taylor 展開は

$$\tan 0.05 = 0.05+\frac{1}{3}(0.05)^3+\frac{1}{15}\frac{2+11\sin^2 c+2\sin^4 c}{\cos^6 c}(0.05)^5$$

です．(ただし $0<c<0.05$.) ここで $\sin c<c$ と $2+11c^2+2c^4<3$,

$$1/\cos^6 c<1/(1-c^2/2)^6<(1+c^2)^6<2$$

より剰余項は $6(0.05)^5/15<0.0000002$ で上から抑えられるので，$0.05+\frac{1}{3}(0.05)^3=0.0500416666\cdots$ と合わせて答えは 0.050041 です．四捨五入している人がたくさんいましたが，問題は切り捨てるよう求めています．また剰余項が無視できると言うことを根拠なく主張している人がたくさんいましたが減点です．(もう少し先の項まで書いても同じことです．0.05^7 が小さい，というのは係数を見ていないので理由として不十分です．)

$\tan x = \sin x / \cos x$ で分母分子を Taylor 展開してもできますが，正しく誤差を評価するのは少し面倒になります.

なお正しい数値は $0.05004170 \cdots$ です.

[3] 合成関数の微分公式に代入するだけの超基本問題です.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{-y}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

です．右辺を r, θ を使って書いても O.K. です．簡単な問題なので計算ミスは大幅に減点してあります.

[4] これも決まった通りにやるだけの超基本問題なので答えだけ書きます．まず $f_x = f_y = 0$ を解いて，極値を取る点の候補は $(x, y) = (0, 1/2), (1, 1), (-1, 1)$ の 3 つです. 授業でやった通りの方法で機械的に判定できて，最初の点では極値を取らず，あとの 2 点では極小値 -4 を取ります.「極値を求めよ」と言う問題なので，値 -4 を書いていない人は減点です.

[5] これもまず $f_x = f_y = 0$ を解くと $a \neq 0$ のときは $(x, y) = (1/2, 1/4)$ だけが極値を取る点の候補です．あとは [4] と同じように判定すれば $a < 0$ の時はこの点では極値を取らず，$a > 0$ の時はこの点で極値を取ることがわかります．$a = 0$ のときは $f(x, y) = (x + 2y - 1)^2 + 2$ となり，直線 $x + 2y - 1 = 0$ 上で一定値 2 を取るので授業でやった極値の定義 (いわゆる狭義の極値) だとこれは極小値を取りません．よって答えは $a \leq 0$ となります．なお広義の極値の定義を採用した場合は $a = 0$ の時も極小値を取ることになり，答えは $a < 0$ となります．こちらの定義を採用していることがはっきりしている答案は減点していません.

$a = 0$ の場合の処理以外はこれも超基本問題ですが，$f_x = f_y = 0$ を解くところでおかしくなっている人がたくさんいました.