

2013 年数学 I 中間テスト解答・解説

中間テストの配点は、各問 20 点で合計 100 点満点です。最高点は 100 点（8 人）、平均点は 60.2 点（欠席者は除外扱い）で得点分布は次のとおりでした。

-20 (点)	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
3(人)	13	20	16	15	28	16	18	11

[1]  $z = \rho e^{i\theta}$  ( $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) とする。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z^2 = -i &\Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta - \frac{3}{2}\pi)} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \rho = 1 \ \& \ \exists n \in \mathbb{Z} \ \theta = n\pi + \frac{3}{4}\pi \\
 &\Leftrightarrow z = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right).
 \end{aligned}$$

(2) 自然数  $n$  に対し、

$$\begin{aligned}
 z^n = 1 &\Leftrightarrow \rho = 1 \ \& \ \exists m \in \mathbb{Z} \ n\theta = 2m\pi \\
 &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \ z = \cos \frac{2\pi m}{n} + i \sin \frac{2\pi m}{n}.
 \end{aligned}$$

よって、求める  $z$  は  $\cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ) である。

[コメント] (2) についてですが、最初の論理式は「 $z^n = 1$  となるような自然数  $n$  が存在する」という意味です！全ての自然数  $n$  に対し  $z^n = 1$  が成り立つ」を意味する「 $\forall n \in \mathbb{N} \ z^n = 1$ 」と混同しないよう注意しましょう。

答えしか書いていない答案は全て 0 点にしてあります。複素平面に丸を書いただけで説明したつもりになっている人もいましたが、このような解答も同様に扱っています。

[2] (i) l'Hôpital の定理を用いる場合。

(1)  $f(x) = 1 - \cos^2 x - x^2$ ,  $g(x) = x^4$  とおく。  $x \rightarrow 0$  のとき,  $f(x), g(x) \rightarrow 0$ 。また、

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \sin 2x - 2x &\rightarrow 0; & g'(x) = 4x^3 &\rightarrow 0; \\
 f''(x) = 2 \cos 2x - 2 &\rightarrow 0; & g''(x) = 12x^2 &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

一方、

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-4 \sin 2x}{24x} \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0).$$

したがって、l'Hôpital の定理により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = -\frac{1}{3}.$$

ゆえに,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x - x^2}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{x^4}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}.$$

(2)  $f(x) = \log(1+x) - x$ ,  $g(x) = x^2$  とおく.  $x \rightarrow 0$  のとき,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2(1+x)} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

したがって, l'Hôpital の定理により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(1+x) - x)^2}{(\sqrt{1+x} - 1)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \cdot (\sqrt{1+x} + 1)^2 \right)^2 = 4.$$

(ii) Taylor の定理を用いる場合.

(1) 関数  $f(x) = \sin x$  の 0 のまわりでの Taylor 展開は,

$$\sin x = x - x^3/6 + R(x) \quad \text{ただし} \quad R(x)/x^3 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 x - x^2}{\sin^4 x} &= \frac{\sin^2 x - x^2}{\sin^4 x} \\ &= \frac{(x - x^3/6 + R(x))^2 - x^2}{(x - x^3/6 + R(x))^4} \\ &= \frac{-x^4/3 + R_1(x)}{x^4 + R_2(x)} \quad \text{ただし} \quad R_1(x)/x^4, R_2(x)/x^4 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \\ &= \frac{-1/3 + R_1(x)/x^4}{1 + R_2(x)/x^4} \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(2) 関数  $f(x) = \log(1+x)$  及び  $g(x) = \sqrt{1+x}$  の 0 のまわりでの Taylor 展開は,

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - x^2/2 + R_1(x) \quad \text{ただし} \quad R_1(x)/x^2 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0), \\ \sqrt{1+x} &= 1 + x/2 + R_2(x) \quad \text{ただし} \quad R_2(x)/x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{(\log(1+x) - x)^2}{(\sqrt{1+x} - 1)^4} &= \frac{x^4/4 + R_3(x)}{x^4/16 + R_4(x)} \quad \text{ただし} \quad R_3(x)/x^4, R_4(x)/x^4 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \\ &= \frac{4 + 16R_3(x)/x^4}{1 + 16R_4(x)/x^4} \rightarrow 4 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

[コメント] l'Hôpital の定理を用いるためには, 不定形であることを示すだけでなく, 分母・分子を微分して得られる関数の極限值が存在することをきちんと示す必要があります. 逆に言えば, 微分して計算した結果発散していたら l'Hôpital の定理は使えないということです. したがって,

計算の正確さは特に重要です．何も考えず l'Hôpital の定理を適用するのではなく，計算を容易にする工夫を考えましょう．

答えは上記の点を留意した書き方であることが望ましいですが，今回の採点ではそのあたりは問題にしていません．余裕があったらこの点について自分の答案を検討してみてください．

[3] 関数  $f(x) = (1+x)^{-5/2}$  の 0 のまわりでの Taylor 展開は，

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdots \left(-\frac{5}{2} - k + 1\right) x^k + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdots \left(-\frac{5}{2} - n\right)}_{= C} (1+\eta)^{-5/2-(n+1)} x^{n+1};$$

ここで  $\eta$  は  $|\eta| \leq |x|$  なる実数である．今  $|\eta| \leq |x| < 1$  なので，剰余項の符号は  $C$  の部分の符号と  $x^{n+1}$  の符号で決まる．前者は  $n$  が奇数のとき正であり，偶数のとき負である．後者は  $n$  が奇数のとき  $x \neq 0$  で正であり，偶数のときは  $x > 0$  で正， $x < 0$  で負である．したがって剰余項が正になるのは  $n$  が奇数で  $x \neq 0$  のとき，または  $n$  が偶数で  $x < 0$  のときである．

[コメント] 高階導関数を計算して教科書に乗っている公式に当てはめるだけの簡単な問題のようですが，写し間違いが多くありました（本来は写すまでもなく覚えているべきです）．特に剰余項の写し間違いが悲惨で，後半が丸々ダメになった人が多いです．また，剰余項は正確に計算できたのになぜか後半で全く論理的な誤りを犯す人が目立ちました．

[4] 極限が存在すると仮定する．まず， $x \rightarrow 0$  のとき  $x^4 \rightarrow 0$  なので， $x \tan x - a - bx - cx^2 - dx^3 \rightarrow 0$  でなくてはならず，したがって  $a = 0$  が必要である．このとき元の極限は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - b - cx - dx^2}{x^3}$$

となり，上と同様の理由から  $b = 0$  が必要である．さらに， $x$  を  $-x$  で置き換えて  $x \rightarrow 0$  としても同じ極限值に収束するが， $\tan x, cx, x^3$  が全て奇関数であることに注意すれば，

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - cx - dx^2}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-x) - c(-x) - d(-x)^2}{(-x)^3} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{x}$$

が分かる．よって  $d = 0$  が必要である．最後に，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)/x - c}{x}$$

とすれば，やはり分子が 0 に収束しなければならないので  $c = 1$  が必要である．

逆に  $a = b = d = 0, c = 1$  のとき極限が存在することを示そう． $f(x) = \tan x, g(x) = x^3$  とおく． $x \rightarrow 0$  のとき  $f(x), g(x) \rightarrow 0$  であり，また

$$f'(x) = 1/\cos^2 x - 1 = \tan^2 x \rightarrow 0; \quad g'(x) = 3x^2 \rightarrow 0. \quad (1)$$

一方，

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{2 \tan x / \cos^2 x}{6x} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0).$$

したがって、l'Hôpital の定理から、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}.$$

[コメント] この問題では計算ミス以外の目立った間違いはありませんでした。[2] と同様に、Taylor の定理を用いて  $\tan x$  を展開しても正答にたどりつきます。

[5] 関数  $f(x) = \log(1+x)$  の 0 のまわりでの Taylor 展開

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} \quad \text{ただし } c \text{ は } |c| \leq |x| \text{ なる実数}$$

を用いる。

$$\log \frac{50}{49} = -\log \left( 1 - \frac{1}{50} \right) = \underbrace{\frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 50^2}}_{= 0.0202} - \frac{1}{3 \cdot 50^3 \cdot (1+\eta)^3}.$$

ここで、 $|\eta| \leq 1/50$  なので、

$$\left| \log \frac{50}{49} - 0.0202 \right| = \left| \frac{1}{3 \cdot 50^3 \cdot (1+\eta)^3} \right| \leq \frac{1}{3 \cdot 49^3} < 0.00001$$

となり、求める数値は 0.0202 である。

[コメント] 1 度全て採点した後で採点基準を変更して採点しなおしたため、答案のこの部分は少し見にくくなっているかもしれませんが、申し訳ありません。青い方が正しい点数です。

適切な関数の Taylor 展開に具体的な値を代入して近似値を求める、というのが問題の趣旨です。近似値が正確であることを証明するには、誤差である剰余項の大きさを見積もるのが簡単かつ厳密です。

$\log(1+x)$  を 0 のまわりで無限級数展開した人も多くいました。もちろんこのやり方でも近似値を求めることができますが、注意すべき点が 1 つあります。それは、無限級数展開が元の関数と一致する範囲は限られているということです。例えば  $\log(1+x)$  なら、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

という等式は  $x$  が 1 より大きいと成立しません。したがってこのやり方で  $\log 50$  や  $\log 49$  を近似することはできません。