Subequivalent systems of bimodules

河東泰之（東大・数理）
Yasuyuki Kawahigashi

この仕事の目的は，subparagroup にあたる概念を導入し，subparagroup と中間環の間の「量子 Galois 対応」と確立することである．

そのため，佐藤 [S] による同値な subfactor/paragroup の定義から出発する．Finite index, finite depth を持つ subfactor $N \subset M$から生じる N-N bimodule のシステムと M-M bimodule のシステムは「同じ」情報を含んでいると考えられる．この考えに基づき，Ocneanu [O1] は，このようにして生じうる 2 つの bimodule のシステムを equivalent と定義した．さらに，佐藤は，二つの subfactor が同値な bimodule のシステムを生じる時，これらの subfactor は (あるいは対応する paragroup は) 同値であると定義した．(ここでは，paragroup とは，finite index, finite depth の subfactor から生じるもののこととする．Subfactor に trivial relative commutant の条件は仮定しない．)

次に paragroup π_1が，A-A, A-B, B-A, B-B の 4 種の bimodule からなるとする．(正確には，抽象的な paragroup の話なので，bimodule ではなく，fusion rule algebra と quantum $6j$-symbol で話を進めるべきだが，hyperfinite の場合の話をするので，簡単のため最初から bimodule で話を進める．) そして，C-C, C-D, D-C, D-D の 4 種の bimodule からなる，paragroup π_2を別に取る．π_2の C-C bimodule のシステムがπ_1の A-A bimodule のシステムとサブシステムと同型である時，π_2はπ_1の subparagroup であると定義する．さらに，二つの paragroup π_1, π_2について，π_1と同値な paragroup π_0が，π_2を subparagroup として持つように選べる時，π_2はπ_1に subequivalent であると定義する．

π_2がπ_1に subequivalent で，さらにπ_3がπ_2に subequivalent ならば，π_3はπ_1に subequivalent である．π_1がπ_2に subequivalent で，さらにπ_2がπ_1に subequivalent ならば，π_1とπ_2は equivalent である．

一方，$N \subset M$に対する generalized intermediate subfactor の概念が Ocneanu [O2] によって導入されている．$N \subset P \subset M$となる Pが明らかに intermeidate subfactor であるが，このようなものに限らず，一般化された定義を導入することがここでの目的には必要である．(量子群から生じる subfactor などでは，たいていの場合，上のような Pは trivial なものしかない．しかし，下に定義する generalized intermediate subfactor はおもしろいものが存在することがしばしばある．)

$N \subset M$を index 有限の subfactor とする．$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$を Jones tower とし，$p$ を $N' \cap M_k$の non-zero projection とする．$pN \subset P \subset Q \subset p(M_k)p$ となるような subfactor $P \subset Q$ を $N \subset M$の generalized intermediate subfactor と定義する．

Ocneanu は，この定義に基づき，E_6, E_8型の subfactor が，それぞれ A_{11}, A_{29}型の subfactor の generalized intermediate subfactor として実現できることなどを [O2] で示している．

このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem. *$N \subset M$を finite index, finite depth を持つ hyperfinite II_1 factor の inclusion とし，πを対応する paragroup とする．このとき，$N \subset M$の generalized intermediate subfactor の同型類と，πの subequivalent paragroup の同型類との間に 1 対 1 対応が存在する．*

証明には佐藤 [S] の，commuting square から 2 つの subfactor を作る技術を使う．[S] については詳しくは本研究報告集内の報告を参照のこと．

References

[O1] A. Ocneanu, An invariant coupling between 3-manifolds and subfactors, with connections to topological and conformal quantum field theory. preprint, 1991.

[O2] A. Ocneanu, Paths on Coxeter diagrams: From Platonic solids and singularities to minimal models and subfactors, in preparation.

[S] N. Sato, Constructing a non-degenerate commuting square from equivalent systems of bimodules, preprint 1997.