Twisted Longo-Rehren subfactors

河東泰之 (東大・数理)
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

2000 年 6 月 5 日

Longo-Rehren は，M 上の有限個の morphism の system$\{\lambda_i\}$ から，subfactor $M \otimes M^{\mathrm{op}} \subset R$ を作る方法を与えた．これを Longo-Rehren subfactor という．ここで，R-R morphism の system を見ると，元の system の “quantum double” になるということが多くの人によって研究されている．特に，R-R morphism の system は，非退化な braiding を持つことがわかっている．([2] およびそこでの引用文献を参照のこと．) そこで，もとから system $\{\lambda_i\}$ が非退化な braiding を持つ場合に何が起こるかを考えてみると，R-R morphism の system はもとの system を単に 2 重に水増ししたものであることがわかっている．このことから，このような場合の Longo-Rehren subfactor は一回 basic construction を行って，dual に移ってもやはり，Longo-Rehren subfactor なのではないかと考えられるが，泉 [2] は，そうではなく，ある種の “twist” の効果が現れることを発見した．このことは,「もともと非退化な braiding があるとき，Longo-Rehren subfactor の dual は，twisted Longo-Rehren subfactor である」と言い表せる．

一方，Longo-Rehren によって定義され，Xu, Böckenhauer-Evans によって詳しく調べられた α-induction の理論が，Longo-Rehren subfactor の研究とよく似ていることも，[2] で明らかになった．そこで我々は，[1] で α-induction と Longo-Rehren subfactor の関係について調べた．まず設定を述べよう．(詳しくは，[1] とそこでの引用文献を見ていただきたい．ここでは簡略に述べる．) $N \subset M$ を subfactor とし，N-N morphism の system が braiding を持つとする．このとき，system の endomorphism λ は，braiding を用いて，M の endomorphism $\alpha^{\pm}_{\lambda}$ にいっせいに延長される．ここで $\pm$ は braiding の choice を表す．この $\alpha^{\pm}_{\lambda}$ の既約分解から生成される M-M morphism の system を考える．今 braiding は非退化としよう．[1] の中に次の結果がある．

この M-M system からできる quantum double system は，もとの N-N system の単なる “double” と同型であり，canonical endomorphism はこの同型で $\sum Z_{\lambda\mu}\lambda \otimes \mu^{\mathrm{op}}$ に移る．

ここで，$Z_{\lambda\mu} = \langle \alpha^+_{\lambda}, \alpha^-_{\mu} \rangle$ である．一方最近，Rehren [3] は，generalized Longo-Rehren subfactor の構成を行った．彼は一般に endomorphism の system がいっせいに延長される状況を考えているが，延長が α-induction のときは彼の定理は次のように与えられる．

上のような α-induction に対し，$\sum Z_{\lambda\mu}\lambda \otimes \mu^{\mathrm{op}}$ は $N \otimes N^{\mathrm{op}}$ 上の dual canonical endomorphism である．

また，そこでRehrenが実際に構成したsubfactorをgeneralized Longo-Rehren subfactorという．

このことと，上のtwisted Longo-Rehren subfactorの現れ方を見ると，α-inductionで生じた M-M system から Longo-Rehren subfactor を作って dual に移行すると，"twisted generalized Longo-Rehren subfactor" ができているのではないか，と考えられる．今回は計算によってそのとおりであることを確認した．

そこで，M-M systemからtwised Longo-Rehren subfactorを作ってdualに移行すればtwistのないgeneralized Longo-Rehren subfactorになると考えたくなるが，M-M system は一般に braided でないので，twist させることができない．そこで別のことを考えてみよう．

いい状況では，subfactorの同型類に注目すれば，twisted Longo-Rehren subfactorも普通のLongo-Rehren subfactorも同型であることが示せると思われる．たとえば，systemが，S^1 上のcompletely rational netから生じているときは確かにそうであることが，Kawahigashi-Longo-Müger によって示されているし，一般の非退化な braided system の場合も paragroup が同じであることが示せるであろう．このことと，上のことを合わせると，generalized Longo-Rehren subfactor でも subfactor の同型類に注目すれば "twist" の効果が消えるのではないかと考えられる．Chiral locality を満たす場合には，generalized Longo-Rehren subfactor の intermediate subfactor を見ることによって，このことが示せると思われる．(このことは，conformal inclusion $SU(2)_{10} \subset SO(5)_1$ の場合にはすでにRehrenによって指摘されている．) そうすると，そのような場合については M-M system から Longo-Rehren subfactor を作って dual に移行すると，単にgeneralized Longo-Rehren subfactorができているということになり，[3] の最後であげられている予想が否定的に解ける．

引用文献は多くなりすぎるので，ごくわずかしか挙げていない．詳しくは，[1] の引用文献表を見ていただきたい．

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Longo-Rehren subfactors arising from α-induction*, preprint, math.OA/0002154.

[2] M. Izumi, *The structure of sectors associated with the Longo-Rehren inclusions I. General theory*, preprint 1999.

[3] K.-H. Rehren, *Canonical tensor product subfactors*, Commun. Math. Phys. **211**, 395–406 (2000).