Jones index 有限の subfactor を保つ自己同型

河東泰之（東大・理）
Yasuyuki Kawahigashi

§0 導入.

Jones index 有限の subfactor に対し，大きな factor と subfactor がさまざまな意味で「近い」ことが，Jones, Pimsner-Popa, Loi, Hamachi-Kosaki などによって示されてきている．ここでは自己同型／群作用の近さを考える．一番簡単な場合は次の結果である．

Fact. *II_1 factors $N \subset M$, $[M:N] < \infty$, に対して，$\alpha \in Aut(M)$ が $\alpha(N) = N$を満たせば，*

$$\alpha \textit{ is free on } M \Longleftrightarrow \alpha|_N \textit{ is free.}$$

このこと自体はいろいろな証明が可能であろう．一つの証明は[Lo] にある．ここでの方法に基づく証明は後に示す．この結果はαと$\alpha|_N$が何らかの意味で近いということを言っている．特に factor が AFD のときは，これら二つは outer conjugate になることに注意しよう．以下，このタイプの結果を一般的な状況下で導き，その応用について述べる．この様なことを考える動機は，一つには，factor の研究に極めて有効だった automorphism approach を subfactor の研究に適用しよう，というものであり，また，もっと直接的には，III_λ型, $0 < \lambda < 1$, subfactor の研究に役立つと期待されるからである．詳しくは，論文[Ka] を参照していただきたい．III 型の index 理論は，幸崎[K] が，[C,H] を用いて[J] を拡張したことによって始まった．基本文献[J,K] の定義，結果などは，断り無しに用いる．

§1 準備と一般的結果

ここでは，浜地-幸崎の方法[HK] の応用を用いる．彼らの結果は，$N \subset M$が III 型 factor のペアで有限 index の時，それぞれの flow of weights

の関係に強い制限がつく，というものであった．それには，N上の weight φ と，conditional expectation を用いて作った$\varphi \cdot E$から，modular automorphism groups σ^{φ}, $\sigma^{\varphi \cdot E}$を作り，これらで接合積を作るのであった．ここでσ^{φ}は，$\mathbf{R}$-作用として$\sigma^{\varphi \cdot E}$の制限であること，$\sigma^{\varphi \cdot E}$は Eと可換であること，に注意して次のような一般化を考える．

(1) N, Mは，σ-finite な von Neumann 環.

(2) $E : M \to N$は，conditional expectation で，ある$\lambda > 0$ に対し，$E - \lambda I$が M上 completely positive になる．

(3) 群 G の M上の作用α_gがあって，$E \cdot \alpha_g = \alpha_g \cdot E$.

ここで，M, Nが factor の時は，(2) での best なλが，Index Eのが逆数である.（たとえば，[BDH].）Factor の場合に興味があるのだが，index 有限，という仮定にしないのは，あとで，ultraproduct や接合積に結果を使いたいからである．(3) については，特に$\alpha_g(N) = N$だが，次の条件の下では，逆に$\alpha_g(N) = N$から，(3) が従うので，これら二つの差はあまりない．

(a) $N' \cap M = \mathbf{C}$.

(b) Mは II_1型.

(c) Eは，日合の意味で minimum index を持つ．

さて，このとき次のダイアグラムが得られる．

$$
\begin{array}{ccccc}
N & \overset{E}{\leftarrow} & M & \overset{E_1}{\leftarrow} & M_1 \\
\cap & & \cap & & \cap \\
N \rtimes_{\alpha} G & \overset{\hat{E}}{\leftarrow} & M \rtimes_{\alpha} G & \overset{\hat{E}_1}{\leftarrow} & M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G
\end{array}
$$

ここで，E_1, M_1は，basic construction で得られる．([K].) 今，N, Mは factor ではないが，問題はない．Conditional expectation $\hat{E}$は，Eから，自然に定まる.（たとえば，[Hi2,3] 参照.）また M_1上の G-作用，$\tilde{\alpha}$

は，$\alpha_g(e_N) = e_N$で自然に定まったものである．これらは，以下のように期待される性質を持つ．以下，簡単のため，群 G は，可換とする．

- $E_1, \tilde{\alpha}$は，M, M_1, λに対し，もとと同じ型の性質，(1), (2), (3) を満たす．
- $\hat{E}, \hat{\alpha}$は，$M \rtimes_\alpha G, N \rtimes_\alpha \hat{G}, \lambda$に対し，もとと同じ型の性質，(1), (2), (3) を満たす．
- $\hat{E}_1$は，E_1からも，また，$\hat{E}$の basic construction としても作れるが，両者は一致する．
- $M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ 上の$\hat{G}$-作用は，$\tilde{\alpha}$の双対作用と，$\hat{\alpha}$ on $M \rtimes_\alpha G$ の basic construction への延長の二つがあるが，両者は一致する．

実際にこれらを証明しようとすれば，それなりのページ数がいるが，本質的には，やればできることだけである．詳しくは[Ka] を参照のこと．さて，この状況下で，浜地-幸崎型の論法ができ，次のダイアグラムを得る．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Z}((N \rtimes_\alpha G)' \cap (M \rtimes_\alpha G)) & \cong & \mathcal{Z}((M \rtimes_\alpha G)' \cap (M_1 \rtimes_{\tilde{\alpha}} G)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{Z}(N \rtimes_\alpha G) & & \mathcal{Z}(M \rtimes_\alpha G)
\end{array}$$

ここで $\mathcal{Z}$は，center を表し，縦の矢印は，Pimsner-Popa 型の評価を満たす conditional expectation であり，また$\hat{\alpha}$は，このダイアグラムとコンパティブルである．

§2 自己同型への応用

さて，ここでは，N, Mを factor としよう．すぐ上のダイアグラムで縦の conditional expectation はそれぞれ，$X_M \times \{1, 2, \ldots, m\} \to X_M$, $X_N \times \{1, 2, \ldots, n\} \to X_N$という projection になる．ここで，$n, m$ は index で押さえられる整数である．（双対作用の central ergodicity による．）したがって，たとえば，$p \in \Gamma(\alpha) \subset \hat{G}$とすれば，$\hat{\alpha}_p$は，上のダイアグラムの左下で，trivial，したがって，上に行って，$X_M \times \{1, 2, \ldots, m\}$

上でも有限回くりかえすことによって tirival となり，右下まで行って，$\hat{\alpha}_p^k = id$ となる．ここで k は index で上限の決まる整数である．したがって，$k\Gamma(\alpha) \subset \Gamma(\alpha|_N)$ が証明できたことになる．対称性より $k\Gamma(\alpha|_N) \subset \Gamma(\alpha)$ もわかる．これを特に $G = \mathbf{Z}$ に適用すれば，$\Gamma(\alpha) = \mathbf{T} \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha|_N) = \mathbf{T}$ となるので§0 で述べた Fact の証明が従うことに注意する．言い換えれば，α [resp. $\alpha|_N$] が inner なら，$\alpha|_N$ [resp. α] も有限乗するうちに inner になるといってもよい．以下，この型の議論を用いて，α [resp. $\alpha|_N$] がある性質を持てば，$\alpha|_N$ [resp. α] も有限乗するうちに同じ性質を持つ，というタイプの命題をいくつか示す.「ある性質」，とは，(approximately) (pointwise) inner, centrally trivial といった性質である．ここで二つの括弧はそれぞれ有・無二通り，計四通りの条件を意味する.（両方の括弧がない場合は inner という条件であり，すでに上で述べた.）

次に centrally trivial automorphism を考えよう．記号を簡単にするため，M, N を II_1 型と仮定する.（証明は，他の場合でも本質的に同じである.）まず $\alpha|_N$ が centrally trivial としよう．E を項別にほどこしてえられる $E^\omega : M^\omega \cap N' \to N^\omega \cap N' = N_\omega$ が，同じ Pimsner-Popa 評価を持つことと，$\alpha_o m = id$ on N_ω を用いて，§1 の議論を適用すれば，$N' \cap M^\omega$ 上，$k > 0$ と $a \in N' \cap M^\omega, a \neq 0$ が存在して，$(\alpha^\omega)^k(x)a = ax$, $\forall x \in M^\omega \cap N'$, を満たすことがわかる．今度は ergodicity がないので，a を極分解しても unitary が得られるとは限らないが，それは問題ではなく，Connes 型の議論によって，$(\alpha^\omega)^k = id$ on M_ω が得られる．今は，$a \in M_\omega$ かどうかわからないが，それは関係なく結論が得られる．また，$(\alpha^\omega)^k = id$ on $M^\omega \cap N'$ かどうかもわからないがそれもかまわないのである．これが ultraproduct のありがたい点である．逆に $\alpha \in \mathrm{Cnt}(M)$ とした場合は，$\alpha|_N \cong \tilde{\alpha}^{e_N}$ を用いればよい．Factor が properly infinite のときは何の問題もなく，II_1 型の場合は Connes による centrally trivial automorphism の特徴づけを使う．

次に pointwise innerness に移ろう．この定義は，$\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ が pointwise inner であるとは，すべての $\varphi \in M_*$ に対して，$u \in \mathcal{U}(M)$ が存在し

て，$\varphi{\cdot}\alpha = \mathrm{Ad}(u){\cdot}\varphi$ となることである．これと下で述べる approximately pointwise innerness は，III 型でのみ興味がある．この pointwise inner という条件は Haagerup-Størmer によって導入されたが，彼らは，III_λ型，$0 \leq \lambda < 1$, という条件下で$\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ が pointwise inner である必要十分条件は$\alpha = \mathrm{Ad}(u) \cdot \bar{\sigma}_c$の形（$\bar{\sigma}$は extended modular automorphism）であることを示した．また，III_1型の場合でも AFD ならば，これが正しいことも最近示したとのことである（未発表）．一方，Mの離散群による接合積の flow of weights を決めるのは，この型の automorphism である．（[KT], または関根[S].）したがって，index 有限の場合この型の automorphis についても上と同様のことが成り立つはずである．実際，次の結果が得られる．

定理．上の条件下で

$$D(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \text{は } Ad(u) \cdot \bar{\sigma}_c \text{の形 }\}.$$

とおくと整数$k > 0$があって，$kD(\alpha) \subset D(\alpha|_N)$および$kD(\alpha|_N) \subset D(\alpha)$となる．

AFD の場合は，このタイプの自己同型は centrall trivial automorphism のクラスと同じであることが，[KST] のよって示されている．もちろんこの場合は，上の centrally trivial automorphism に対するのと同じ結果をもたらす．

今度は，approximately pointwise inner automorphism である．Haagerup と Størmer は，$\alpha \in (M)$ が approximately pointwise inner である，ということを任意の$\varphi \in M_*$, $\varepsilon > 0$ に対し $u \in \mathcal{U}(M)$ が存在して $\|\mathrm{Ad}(u) \cdot \varphi - \varphi \cdot \alpha\| < \varepsilon$となること，と定義した．そして彼らは，$\alpha$ が approximately pointwise inner になるのは，$\mathrm{mod}(\alpha) = id$ の時であることを示した．ここで mod は，Connes-Takesaki module を意味する．Module を考えるには，invariant weight による modular automorphism group での接合積を作ればよいので，浜地-幸崎型の議論と compatible に実行できる．よって，次の定理を得る．

定理．上の条件下で

$$A(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \text{は } \textit{approximately pointwise inner.}\}.$$

とおくと整数 $k > 0$ があって，$kA(\alpha) \subset A(\alpha|_N)$ および $kA(\alpha|_N) \subset A(\alpha)$ となる．

さらに，AFD の場合は，Ker mod $= \overline{\mathrm{Int}}$であることが[KST] によって示されているので，上の定理で "poinwise" を落とすことができる．

§3 Loi の結果（AFD II_1の場合）への応用．

さて，今までの話はみな一般論であった．もっと細かい話をしようとすると AFD の場合に限定せざるを得ない．そこで，以下，M, Nを AFD II_1-factor としよう．この場合については，最近の P. Loi の研究[L] がある．ここでの話題は，我々の方法が彼の理論に応用できることを示すことである．まず，彼の理論のポイントを示そう．彼の目的は，III_λ型，$0 < \lambda < 1$, の subfactor の研究である．その時ある緩やかな仮定の下で subfactor にも同時に discrete decomposition を適用することができ，そこから II_∞型，さらには II_1型の subfactor $N \subset M$とそれを global に保つ自己同型が得られる．そこで，そういった automorphism のうち free なものを outer cojugacy で分類することが問題になるのである．ここで free とは，N, または M上 free ということであり，これらは，§2 で述べたように．同値である．また．outer conjugacy の定義で用いるものは，Nを global に保つ automorphism，そして Nの unitary から来る inner automorphism である．Loi は，Connes 型の model action の splitting による，free automorphism の一意性の論法を適用しようとした．Connes の議論で必要になるのは次の二つのポイントであった．

(A) 自己同型の approximate innerness.

(B) 非可換 Rohlin の lemma を用いるための ultraproduct 上での freeness.

これらをどのように変えればよいかを示そう．Loi は，(A) を

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}(u_n), \qquad u_n \in \mathcal{U}(N),$$

という形による近似，(B) を $N^\omega \cap M'$でのαの freeness とすれば，Connes 型の議論がそのまま適用できて，自己同型の一意性が示せることに気付いた．そこで，これらの条件をより使いやすい形から導くことが問題になる．まず，彼は，$\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$, $\alpha(N) = N$, に対し，downward basic construction を行って Jones projections e_{-j}と tunnel N_jを作り，αを次々N内の inner automorphism で perturb することにより，各 jに対し perturbed αが$\alpha(e_{-j}) = e_{-j}$を満たすようにできることを示した．この時，αを各 $N_j' \cap M$に制限したものが，αの outer conjugacy invariant であり，Loi はこれを$\Phi(\alpha)$ と書いている．そして，Ker Φがちょうど，上のような Nの unitary から来る inner automorphism による近似を許す自己同型のクラスであることを，$N' \cap M = \mathbf{C}$ と Nは finite depth を持つ，という仮定の下で示し，さらにこの仮定の下で，αが free であれば $N^\omega \cap M'$上での freeness も従うことを示したのである．後者には，[O] でアナウンスされているが，誰も証明を見たことのない Ocneanu の定理を用いる．ここでは，我々の方法の応用として，$N' \cap M = \mathbf{C}$ という条件は不要であること，Ocneanu の定理は使わなくてすむことを示す．

まず，$N' \cap M = \mathbf{C}$ の方である．ここで問題になるのは，上で作った invariant Φの連続性である．それは，構成で unitary で動かしてから relative commutant に制限しているからでこの unitary の選択が連続的にできるか?ということが問題なのである．しかし，この問題は，Connes-Takesaki の module の時と同じである．Module のときも unitary で動かしてから centralizer の center に制限するため，問題があったのであるが，module が Borel homomorphism であることを示すことによって，closed graph theorem 型の結果によって連続性がわかるのであった．ここでもちょうど同じ論法が適用でき，なにも問題は生じないことがわかる．

次に ultraproduct である．Loi の使っている Ocneanu の定理とは，trivial relative commutant, finite depth の仮定の下で，$N^\omega \cap M'$が M_ω の index 有限の subfactor になる，というものでさらに index の式も与えられている．もし，これを認めれば，αの freeness から，α_ωが，M_ω上 free になるので，単に ultraproduct 上で§0 の Fact を用いることによって，ただちに結論が出る．しかし，Ocneanu のこの結果の証明はどこにも発表されておらず，また，何人かに聞いたところでは，誰も知らないようである．そういう結果を使うのは，どうも気味が悪いので，ここでの方法を使えば無しですませられることを示そう．Trivial relative commutant の条件が落とせることもこの方法の利点である．

まず，Popa の結果によって，finite depth ならば（trivial relative commutant でなくても）tunnel N_jが generating なように，すなわち$\bigvee_j(N_j' \cap M) = M$となるようにとれるので，そのような tunnel を一つ固定する．このとき，$\cdots N_2^\omega \subset N_1^\omega \subset N^\omega \subset M^\omega$ が，同じ Jones projections$\{e_{-j}\}$によって tunnel になることに注意する．すると，$N^\omega \cap M' = \cap_j N_j^\omega$がわかる．なぜならば，各 e_{-j}が M内にあることと上の tunnel を使って "$\subset$" がわかり，$x \in N_j^\omega$, $a \in N_j' \cap M$ならば $xa = ax$ であることと generating property によって "$\supset$" がわかるからである．一方，Popa の方法での key lemma は，$c > 0$ が存在して，$E_{N_j \vee (N_j' \cap M)}(x) \geq cx$, $\forall x \in M_+$となることであった．よって，conditional expectation $E : M_\omega \to N_\omega \cap N'$は，$\lim E_{N_j^\omega}$で与えられることを用いれば，$x \in M_{\omega,+}$に対して，

$$\begin{aligned}
E_{N_j^\omega}(x) &= E_{N_j^\omega}(E_{N_j^\omega \vee (N_j' \cap M)}(x)) \\
&= E_{N_j^\omega}(E_{N_j^\omega \vee \mathcal{Z}(N_j' \cap M)}(x)) \\
&\geq c' E_{N_j^\omega \vee \mathcal{Z}(N_j' \cap M)}(x) \\
&\geq c' cx,
\end{aligned}$$

であることから，$E(x) \geq cc'x$ を得る．ただし，ここで $x \in M'$, $N_j' \cap M \subset M$を用いており，また $c' > 0$ は $\mathcal{Z}(N_j' \cap M)$ の minimal projections の

trace を見ることによって得られる．（Perron-Frobenius 固有ベクトルの成分から計算でき，c'が真に正であることがわかる．）したがって，α_ωと，$E : M_\omega \to N^\omega \cap M'$とに§2 の議論を適用して，目標の freeness を得る．この方法では，$N^\omega \cap M'$が factor であることが不要である（また，証明できない）ことに注意しておく．

References

[BDH] M. Baillet, Y. Denizeau, & J.-F. Havet, *Indice d'une esperance conditionnelle*, Compos. Math. **66** (1988), 199–236.

[C] A. Connes, *Spatial theory of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **35** (1980), 153–164.

[CT] A. Connes & M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type III*, Tohoku Math. J. **29** (1977), 473–555.

[H] U. Haagerup, *Operator valued weights in von Neumann algebras I*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 175–206; *II*, ibid., **33** (1979), 339–361.

[HS1] U. Haagerup & E. Størmer, *Equivalences of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights*, (to appear in Adv. Math.).

[HS2] U. Haagerup & E. Størmer, *Pointwise inner automorphisms of von Neumann algebras* with an appendix by C. Sutherland, J. Funct. Anal. **92** (1990), 177–201.

[HK] T. Hamachi & H. Kosaki, *Index and flow of weights of factors of type III*, Proc. Japan Academy **64A** (1988), 11–13.

[Hi1] F. Hiai, *Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **24** (1988), 673–678.

[Hi2] F. Hiai, *Minimum index for subfactors and entropy*, preprint, 1989, Hokkaido University.

[Hi3] F. Hiai, *Minimum index for subfactors and entropy, II*, preprint, 1990, Hokkaido University.

[J] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–15.

[Ka] Y. Kawahigashi, *Automorphisms commuting with a conditional expectation onto a subfactor with finite index*, (preprint, 1990).
[KST] Y. Kawahigashi, C. E. Sutherland, & M. Takesaki, *The structure of the automorphism group of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group actions*, (preprint, 1989).
[KT] Y. Kawahigashi & M. Takesaki, *Compact abelian group actions on injective factors*, (to appear in J. Funct. Anal.).
[K] H. Kosaki, *Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 123–140.
[L] P. H. Loi, *On automorphisms of subfactors*, preprint, 1990, UCLA.
[O] A. Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)", London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119–172.
[S] Y. Sekine, *Flows of weights of crossed products of type III factors by discrete groups*, preprint, 1989.